

# Cuadernillo de Campo

Este cuadernillo pertenece a

\_\_\_\_\_ /  
de la Institución Educativa \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ /  
del municipio de \_\_\_\_\_

y servirá para disfrutar del tiempo en el Aula Taller Explora  
de Matemáticas del \_\_\_\_ del mes de \_\_\_\_\_  
al \_\_\_\_ del mes de \_\_\_\_\_ de 2005.

Palacio de la Cultura Rafael Uribe Uribe  
Medellín

Las Aulas Taller Explora y este cuadernillo, son posibles gracias a la coordinación del Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA, el apoyo académico de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín y Eafit, y la promoción de la Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia – Palacio de la Cultura Rafael Uribe Uribe, y las Fundaciones Fraternidad Medellín, Bancolombia, Éxito y Suramericana.

#### CUADERNILLO DE CAMPO AULA DE MATEMÁTICAS

Aula Taller Explora de Matemáticas

Coordinadora

Sara María Velásquez

Asistentes de Investigación y Coautores

Grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Grupo Explora

Coordinación editorial:

Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia – CTA

Primera edición

Marzo de 2005. Medellín

Impreso en Colombia

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta cartilla, sin la autorización expresa de sus autores o del Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia – CTA©.

## PRESENTACIÓN

Las Aulas Taller Explora son concebidas como un elemento dinámico de acercamiento entre los niños, niñas y jóvenes y la ciencia, mediante la búsqueda y el fomento de un ambiente de continua creación y aprendizaje, involucrando todos los sentidos, el uso de la razón y la experiencia. Un espacio para aprender haciendo y divertirse aprendiendo.

Las Aulas son el resultado de la unión del Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia-CTA, la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín y EAFIT a través del Servicio Social Educativo Universitario. Fueron dotadas y están en operación gracias al decidido apoyo de la Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia, el Palacio de la Cultura Rafael Uribe Uribe, las Fundaciones Fraternidad Medellín, Bancolombia, Éxito y Suramericana y la Presidencia de la República a través del Programa Computadores para Educar.

El Aula Taller Explora de Matemáticas, es direccionada académicamente por la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. En ella se enseñan las matemáticas de una forma novedosa a través de la experimentación, conectando las manos y el cerebro para permitir que el aprendizaje sea más significativo.

La metodología central es la realización de actividades en ambiente de taller, donde el conocimiento se adquiere por descubrimiento y asimilación propios y no por imposición, despertando curiosidad en torno al tema o problema planteado.

Este cuadernillo ha sido desarrollado por los integrantes del Grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín y por los facilitadores del Grupo Explora.

Para nosotros es muy importante contar tu presencia. Bienvenido siempre a las Aulas Taller Explora y al mundo de la ciencia y la tecnología.

Cordialmente,  
El CTA y sus amigos.

# PRIMERA SESIÓN



## OBJETIVOS

1. Iniciar el estudio de la geometría mediante la experimentación, partiendo de lo concreto para llegar a lo abstracto, es decir, del estudio de los cuerpos geométricos a las figuras planas.
2. Mejorar la motricidad fina, empleando herramientas como la regla y el compás para la construcción de rompecabezas, prismas, pirámides y cuerpos regulares.

Los conceptos involucrados en las actividades de esta sesión son:

- Poliedro
- Cuerpo redondo
- Polígono y no polígono
- Arista
- Vértice
- Ángulo diedro y Poliedro
- Convexo y no convexo
- Poliedro Regular
- Área y volumen
- Relación de Euler
- Rodar y deslizar
- Triángulos y Cuadriláteros
- Suma de ángulos interiores

## Cuerpos geométricos y figuras planas

Proyecto	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales	Colección de cuerpos (algunos con los trazos especificados), figuras planas, tiras y broches.

Si observas detenidamente a tu alrededor te darás cuenta de que los cuerpos geométricos son idealizaciones de las formas de los objetos que te rodean, y aunque algunos de ellos tienen funciones diferentes, exhiben formas similares. Por ejemplo, un balón de fútbol se asemeja a una naranja, y ambos a su vez pueden representarse matemáticamente mediante una esfera. Algo similar sucede con las cajas de fósforos y los libros, que se pueden representar mediante un prisma.

Escribe otros objetos con formas parecidas a la de la naranja \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ahora escribe objetos con forma parecida a la del libro \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué diferencias encuentras entre las formas del libro y la naranja? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Toma cuerpos cuya forma sea similar a la forma de los cuerpos descritos anteriormente y ubícalos sobre un plano inclinado. Describe lo que sucede: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Como ves, existen cuerpos que tienen todas sus caras planas y hay otros en donde algunas de sus caras son curvas. A los primeros los llamamos cuerpos poliédricos y a los que presentan superficies curvas los denominamos cuerpos redondos.

De acuerdo con lo anterior clasifica los cuerpos que tienes sobre la mesa.

Veamos las características comunes en los poliedros:

Toma los cuerpos que están pintados con marcador. ¿En dónde están pintados de color negro? \_\_\_\_\_ ¿y de verde? \_\_\_\_\_ ¿cómo llamas las partes que no están pintadas? \_\_\_\_\_

Las caras planas son llamadas polígonos (poli: varios, gonos: lados); los puntos negros son llamados vértices o ángulos poliedros y las líneas verdes se llaman aristas o ángulos diedros.

Cuando un polígono tiene todos sus lados y ángulos iguales es llamado polígono regular. Basándote en esta definición ¿cómo definirías un poliedro regular? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ahora vamos a subdividir el conjunto de los poliedros. Separa primero los poliedros regulares y completa la siguiente tabla:

Nombre	No. caras	Aristas	Vértices	Ángulos diedros	Ángulos poliedros
Tetra-edro	4				
Hexa-edro (Cubo)	6				
Octa-edro	8				
Dodec-aedro	12				
I cosa-edro	20				

Verifica con los resultados obtenidos en el cuadro anterior, la siguiente relación:

$C + V - A = 2$ . Relación de Euler

Donde C = Número de caras, V = Número de vértices, A = Número de aristas.

De acuerdo a la experiencia realizada ¿cuáles son las características comunes de los poliedros regulares? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿cómo son sus caras? \_\_\_\_\_

¿cómo son sus ángulos poliedros? \_\_\_\_\_

Se han trabajado 5 poliedros regulares. ¿Existirán otros poliedros que también sean regulares? Confronta tu respuesta.

Escribe falso o verdadero según lo observado:

En un poliedro regular...

- Todas las caras son polígonos regulares. \_\_\_\_\_
- Todas las caras son polígonos regulares iguales. \_\_\_\_\_
- Todos los ángulos poliedros son iguales. \_\_\_\_\_

Toma los cuerpos que tengan más de dos caras que sean triángulos, obsérvalos y forma un subconjunto con las pirámides. ¿Cómo defines una pirámide? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Cuenta el número de caras, aristas, vértices, ángulos diedros y ángulos poliedros. Organiza la información en el cuadro que aparece a continuación:

Nombre	Caras	Aristas	Vértices	Ángulos diedros	Ángulos poliedros

Verifica la relación de Euler encontrada para los poliedros regulares. ¿Se cumple? \_\_\_\_\_

¿Qué otras relaciones puedes establecer? \_\_\_\_\_

¿Existirá algún cuerpo con más de dos caras triangulares que no sea una pirámide? \_\_\_\_\_

Agrupar en otro subconjunto los cuerpos que tienen dos caras opuestas iguales y el resto de caras sean rectángulos. A estos cuerpos los llamaremos prismas.

Cuenta el número de caras, aristas, vértices, ángulos diedros y ángulos poliedros de los prismas y organizar la información en el cuadro que aparece a continuación:

Nombre	Caras	Aristas	Vértices	Ángulos diedros	Ángulos poliedros

¿Cumplen estos cuerpos la relación de Euler encontrada para los poliedros regulares? \_\_\_\_\_

¿Qué otras relaciones puede establecer? \_\_\_\_\_

¿Existirá algún cuerpo con más de dos caras rectangulares que no sea un prisma? \_\_\_\_\_

Como te podrás dar cuenta, existen cuerpos que no están dentro de las clasificaciones que hemos realizado, entre ellos están los arquimedianos y sus duales, los estrellados, entre otros.

Ahora analicemos algunos de los polígonos que forman las caras de los poliedros vistos anteriormente.

Jugando con tiras y broches

Utilizando tiras de cartón o cartulina unidas por broches vamos a formar algunas figuras planas:

Triángulos

Dadas tres tiras cualquiera, ¿siempre es posible construir un triángulo con ellas?\_\_\_\_\_

Explora.

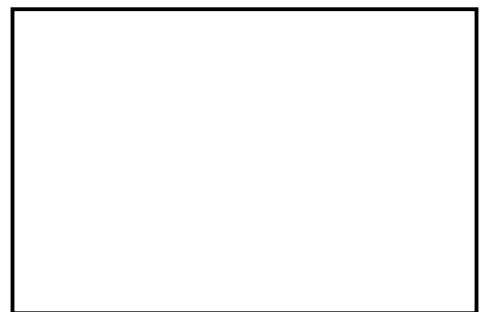
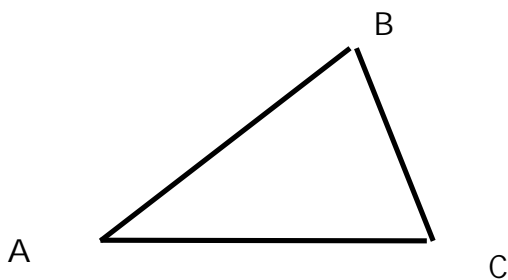
Si encontraste tres tiras con las que no se puede construir un triángulo, observa por qué no es posible. Dibújalas:

¿Cuál debe ser la relación entre las longitudes de las tiras para que pueda formarse triángulo?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Es decir:

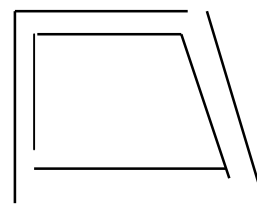
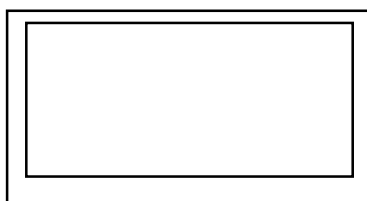
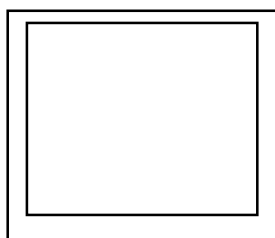




### Cuadriláteros

Construye modelos como los mostrados en las figuras y observa las transformaciones que puede sufrir cada una de ellas. ¿Qué cambia durante las transformaciones? \_\_\_\_\_

¿Qué permanece constante? \_\_\_\_\_



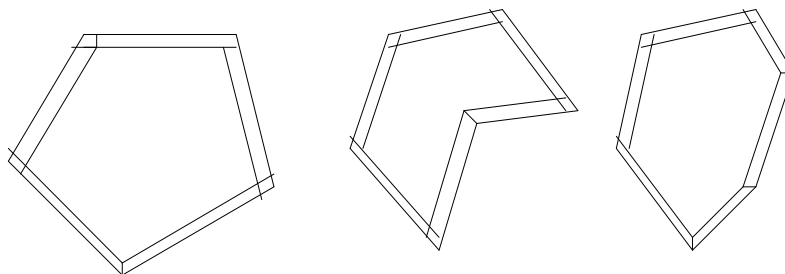
¿Es posible construir cuadriláteros no convexos que tengan todos sus lados iguales? \_\_\_\_\_  
Dibújalos:

### Otros Polígonos

Construye muchos más polígonos utilizando las tiras. Al unir 3, 4, 5, 6, 7, o más tiras iguales se pueden visualizar polígonos regulares. Trata de transformarlo sin soltar ningún broche.

¿Qué cambia durante las transformaciones? \_\_\_\_\_

¿Qué permanece constante? \_\_\_\_\_



¿Encontraste algún polígono que no se deja transformar? \_\_\_\_\_ ¿cuál? \_\_\_\_\_

¿Qué opinas de esto? \_\_\_\_\_

¿Has observado a tu alrededor dónde se utiliza esta figura? \_\_\_\_\_. De ahora en adelante búscala y mira que función puede tener en su lugar.

Indica cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta gráficamente:

Todo cuadrilátero tiene dos diagonales. \_\_\_\_\_

Todos los rectángulos son equiángulos. \_\_\_\_\_

Un rombo es un polígono regular. \_\_\_\_\_

Un cuadrado es un rectángulo. \_\_\_\_\_

Un cuadrado es un rombo. \_\_\_\_\_

Un cuadrado es un paralelogramo. \_\_\_\_\_

Un rectángulo es un cuadrado. \_\_\_\_\_

Un rectángulo es un rombo. \_\_\_\_\_

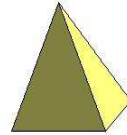
Un rectángulo es un paralelogramo. \_\_\_\_\_

Un cuadrilátero es un trapecio. \_\_\_\_\_

Un cuadrilátero es un rectángulo. \_\_\_\_\_

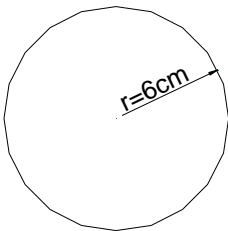
Elaborado por	Juan Felipe Aramburu, Elizabeth Montoya, Viviana Bermúdez y Alejandro Cadena.
Bibliografía	Guías Cuerpos geométricos. Esquemas iniciales de trabajo y Figuras Planas. Grupo Ábaco. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.

# Rompecabezas Tetraédrico

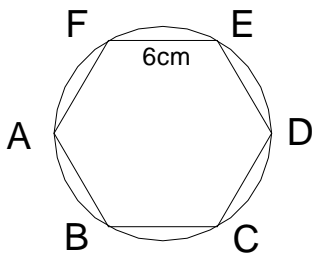


Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Cartulina, compás, regla, lápiz, tijeras, colbón

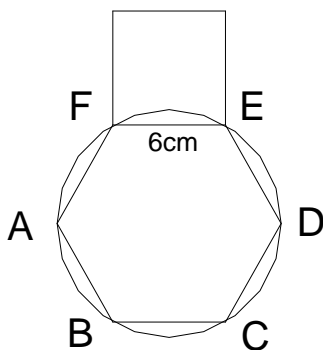
1. Traza una circunferencia de radio 6 centímetros.



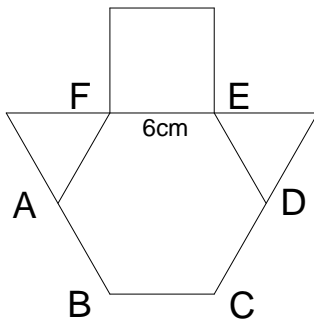
2. Inscribe un hexágono regular de 6 centímetros de lado.



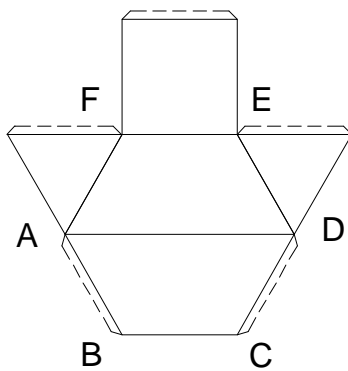
3. Sobre EF, construye un cuadrado de lado EF.



os equiláteros de lados AF y DE respectivamente.



5. Traza un segmento de recta que pase por A y D. Hazle "pestañas" alternadas a la figura que obtuviste.



6. Construye con la plantilla un poliedro de 5 caras.
7. Repite el ejercicio hasta obtener otro poliedro igual.
8. Con los dos poliedros arma un tetraedro.
9. Describe la estrategia que empleaste para hallar la solución.
10. ¿Por qué es posible que estas dos figuras congruentes permitan la construcción del tetraedro?
11. El tetraedro también puede ser construido a partir de 4 partes congruentes. Elabora la plantilla correspondiente para una de estas partes.

# NOTAS



Los conceptos que aprendí hoy son:

---

---

---

---

¿Te gustó el taller? \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

---

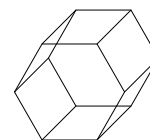
---

¿Te gustó la metodología? \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

---

---

# Construcción de Prismas

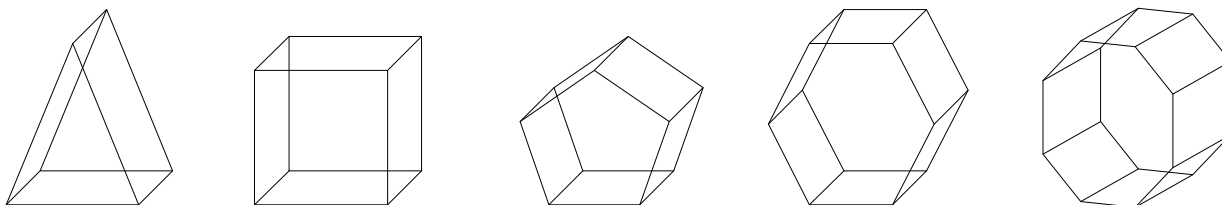


Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Regla, compás, tijeras, cartulina, colbón.

¿Qué es un Prisma?

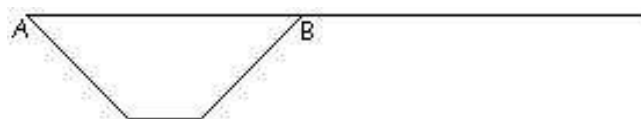
Un prisma es un poliedro que tiene 2 caras paralelas y congruentes llamadas bases; las caras laterales formadas sobre cada uno de los lados de la base pueden ser rectángulos, generando prismas rectos, o paralelogramos, generando prismas oblicuos.

Esta guía te permitirá construir una colección de prismas rectos y te ayudará a recordar la forma en que se trasladan segmentos y se construyen paralelas y perpendiculares. Ejemplos:

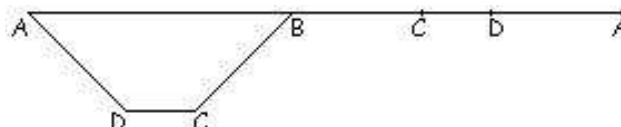


Para que construyas tu propio prisma, desarrolla con atención cada uno de los siguientes pasos:

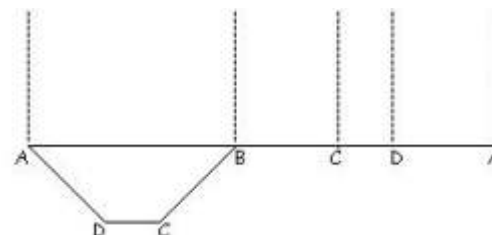
1. Traza una línea horizontal y sobre ella marca dos puntos a la distancia que elijas, luego dibuja la forma de la cara de tu prisma. Puede tener cualquier número de lados.



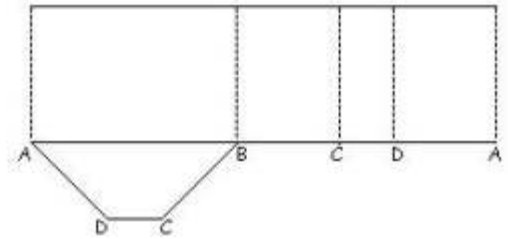
2. Haz aberturas con el compás iguales a BC, CD y DA respectivamente. Luego traslada cada una en su orden sobre la recta horizontal, tal como lo muestra el ejemplo.



3. Traza perpendiculares en cada uno de los puntos que se encuentran sobre la horizontal (A, B, C, D, A). Existen dos formas de hacerlo, ¿cuáles son?, descríbelas o pregúntale al monitor.

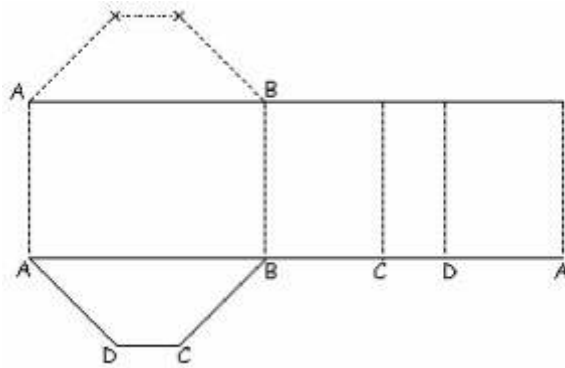


4. Elige una altura cualquiera y traza la unión entre dichas alturas.

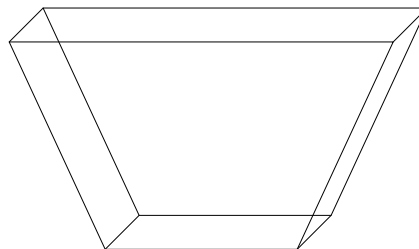


5. Construye la cara en el otro extremo. Para que te quede igual, puedes hacer lo siguiente con el compás:

- Abertura igual a AD, centro en A y trazo el arco.
- Abertura igual a BD, centro en B y trazo el arco cortándolo con el anterior.
- Abertura igual a AC, centro en A y trazo el arco.
- Abertura igual a BC, centro en B y trazo el arco cortándolo con el anterior.



6. Hazle pestañas a la figura, recorta y pega. Debe quedar así:



# Construcción de Pirámides

Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Regla, compás, tijeras, cartulina y pegante

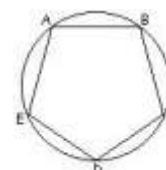
¿Qué es una Pirámide?

Una Pirámide es un poliedro que tiene como base la forma de cualquier polígono y sus caras laterales son triángulos que se juntan en un solo punto.

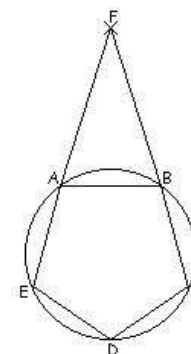
Construcción

Los pasos que tienes que seguir para construir cualquier pirámide se describen a continuación:

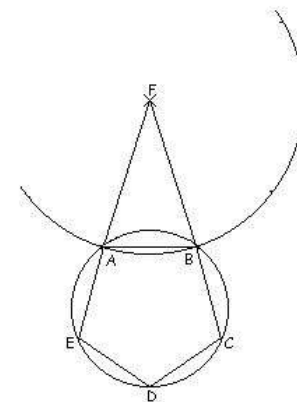
1. Dibuja una circunferencia del radio que desees, luego inscribe en ella la forma del polígono que quieres para la base de tu pirámide.



2. Escoge una abertura con el compás (ten en cuenta que entre mayor sea ésta, mayor será la altura de tu pirámide); luego haz centro en A y traza un arco, después, con la misma abertura y haciendo ahora centro en B, traza un arco que corte el que hiciste anteriormente. (acabas de construir el triángulo isósceles ABF).

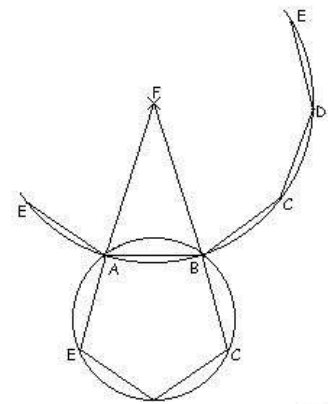


3. Haciendo centro en F y con abertura del compás igual a AF, traza un arco de circunferencia que pase por los puntos A y B.

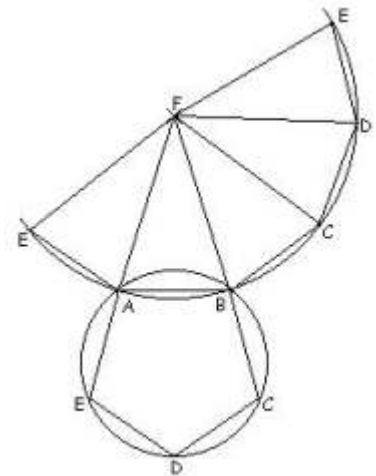




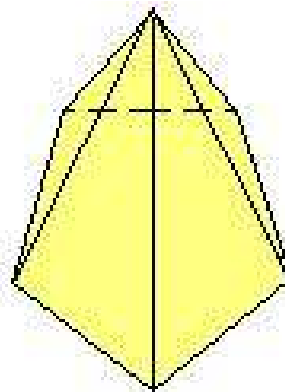
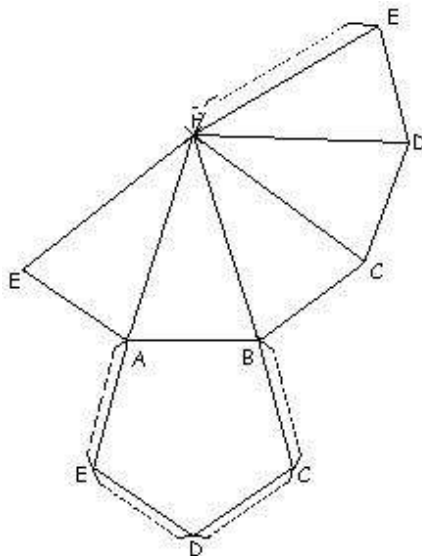
4. Traslada cada uno de los lados del polígono sobre la nueva circunferencia, midiendo cada segmento con el compás. Es muy importante que traslades los segmentos en el orden correcto, tal como lo muestra la figura. (El segmento EA puede trasladarse al lado derecho o al lado izquierdo)



5. Dibuja líneas que vayan desde los puntos ubicados sobre la circunferencia hacia el punto F.



6. Hazle pestañas a la figura sobre el segmento FE y sobre cada uno de los lados de la base de tu pirámide, luego recorta y pega.



# SEGUNDA SESIÓN

## OBJETIVOS

1. Trabajar las cónicas desde su interpretación básica, mediante cortes diferentes realizados a un cono para encontrar la parábola, elipse, hipérbola y circunferencia.
2. Construir en origami un cubo, recordando las propiedades en él involucradas y dejar como retos la construcción de otros cuerpos a partir del mismo módulo.

Conceptos involucrados:

- Curva
- Cónica
- Foco
- Parábola
- Elipse
- Circunferencia
- Hipérbola

# Cónicas

Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Plastilina, bisturí, papel, lápiz, regla y compás.

Seguramente cuando haz escuchado hablar de cónicas la primera imagen que ha cruzado por tu mente es la de un delicioso cono de helado. La verdad es que no estás muy lejos de que esto sea cierto, pues de hecho, los griegos denominaron estas curvas como cónicas precisamente porque era posible obtenerlas a partir de determinados cortes realizados por medio de planos sobre un cono recto. Apolonio de Pérgamo (262 - 190 A.C.) fue el griego que más se interesó por este tipo de curvas planas, y como fruto de su trabajo produjo un elaborado estudio sobre las cónicas, escrito en ocho tomos, siete de los cuales se conservan hasta nuestros días. También introdujo los términos que dan pie al trabajo con esta guía: parábola, hipérbola y elipse.

## Actividad 1

Obtención de las cónicas parábola, hipérbola y elipse, por medio de cortes por planos sobre conos rectos.



Figura 1. Cono recto

Con plastilina construye cuatro conos como los mostrados en la Figura 1. El cono posee una cara sobre la cual es posible pararlo, la que denominaremos base.

A) Toma el bisturí y con mucho cuidado realiza un corte paralelo a la base.

- Toma la sección que acabas de obtener, ponla sobre una hoja de papel y traza su contorno. ¿Qué curva es esta? \_\_\_\_\_

B) Toma otro cono y trata de realizar un corte paralelo a una de las líneas que confluyen en la punta.

- Toma esta sección del cono, ponla sobre una hoja de papel y con el lápiz traza su contorno.

- Observa bien la curva que obtuviste. ¿Tiene algún parecido con la primera? Describe lo que ves. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Sigue realizando cortes sobre el cono. ¿Qué puedes observar? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

C) Toma el tercer cono y realiza un corte oblicuo pero sin que llegue a cortar la base de éste, como lo muestra la Figura.

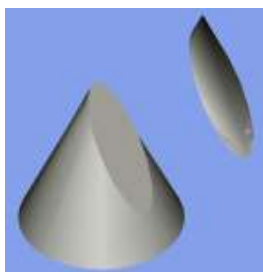
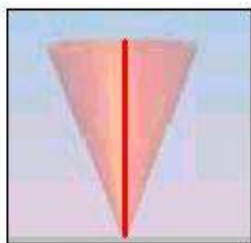


Figura 1. Corte oblicuo

- Toma esta sección de cono, ponla sobre una hoja de papel y con el lápiz traza su contorno. La primera de las curvas y la que acabas de obtener tienen algo en común. ¿Qué es? \_\_\_\_\_
- Sigue realizando cortes sobre el cono. ¿Qué puedes observar? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

D) Toma el último de los conos que construiste. Imagínate una línea que ingresa por el centro de la base y sale por el otro extremo exactamente por la punta.

- Realiza un corte paralelo a esta línea que acabas de imaginar (ver figura)



- Toma esta sección de cono, ponla sobre una hoja de papel y con el lápiz traza su contorno.
- Realiza cortes sucesivos. ¿Qué puedes observar? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- Tiene algún parecido con las curvas que haz hallado. ¿Con cuál de ellas? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Después de observar las curvas que acabas de obtener, clasifícalas y luego asígnale un nombre a cada una de ellas.

## Actividad 2. Para realizar en casa

Debes seguir atentamente las instrucciones que a continuación se te indican:

1. Traza una línea (de la longitud que desees) que pase por el centro de la hoja.
2. Sobre el extremo izquierdo de la línea que acabas de trazar ubica un punto D y traza la perpendicular en D; luego a 3 cm de D y a la derecha ubica el punto V, a partir de este punto y desplazándote a 3 cm a la derecha ubica el punto F.
3. Ubica un punto A a la derecha de V y por él traza la perpendicular.
4. Toma el compás con radio AD y con centro en F corta la línea perpendicular en dos puntos y márcalos.
5. Ubica un punto cualquiera B entre V y F, traza la perpendicular que pasa por él.
6. Toma el compás con radio BD y con centro en F, corta la línea perpendicular en dos puntos y márcalos.
7. Repite los pasos 5 y 6 mínimo dos veces más.

¿Qué curva crees que obtendrías si unieras estos puntos? Asígnale un nombre: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Une F con cada uno de los puntos de corte de las perpendiculares. A partir de estos puntos traza cada una de las perpendiculares a la recta perpendicular que pasa por D. Mira cada una de las distancias y anota tus mediciones \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Crees que las otras distancias medidas desde F hasta los puntos de corte de las perpendiculares y desde estos puntos de corte hasta la perpendicular que pasa por D tienen el mismo valor? \_\_\_\_\_

Si estas distancias tienen la misma medida, describe la propiedad que cumplen los puntos de corte de las perpendiculares: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Actividad 3. Para realizar en casa

1. Traza dos segmentos perpendiculares que se corten en su punto medio C.
2. Sobre los extremo del segmento horizontal marca los puntos A y A'.
3. Igual que en el paso anterior, pero sobre el segmento vertical y con una distancia menor que la que existe entre A y A', marca los puntos B y B'.
4. Toma el compás con centro en B y con radio AC traza dos arcos, que corten el segmento horizontal en F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub>.
5. Toma un punto D que se localice entre F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub>, con radio AD y centro en F<sub>2</sub> traza dos arcos uno a cada lado del segmento horizontal, luego con el mismo radio AD pero con centro en F<sub>1</sub>, traza nuevamente dos arcos, uno a cada lado del segmento horizontal.
6. Toma ahora el radio DA' y con centro en F<sub>2</sub> traza dos arcos, éstos deben cortar uno de los pares de arcos trazados en 5, nómbralos T y L. Con el mismo radio DA' pero esta vez con centro en F<sub>1</sub> traza nuevamente dos arcos, estos deben cortar el otro par de arcos trazados en 5. Nómbralos.
7. Sigue tomando puntos (mínimo tres) sucesivamente entre F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub>. para cada uno repite los pasos seguidos en 5 y 6.

¿Si unieras los puntos que acabas de hallar qué curva obtendrías? Asígnale un nombre: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Desde F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub> traza líneas que unan los puntos de la curva. Mide cada una de estas distancias y anota tus mediciones \_\_\_\_\_

Para el efecto de este taller d significa distancia:

$$d(F_1, T) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad d(T, F_2) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad d(F_1, B) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad d(B, F_2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d(F_1, T) + d(T, F_2) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad d(F_1, B) + d(B, F_2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

¿Qué puedes observar en las distancias que acabas de sumar? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Mide la distancia que hay entre A y A', ¿cómo es esta respecto a las otras distancias? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Actividad 4. Opcional

Complementa el siguiente grafico:

Deducción de la ecuación de la hipérbola	Justificación
1. $d(F',P)-d(F,P)=2a$	1. Por definición de hipérbola.
2. $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-\underline{\hspace{2cm}}=2a$	2. Por definición de distancia entre dos puntos.
3. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\underline{\hspace{2cm}}$	3. Trasposición de términos.
4. $(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$	4. ¿Por qué?
5. $(x+c)^2-4a^2-(x-c)^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$	5. Por reducción de términos semejantes.
6. $x^2+\underline{\hspace{1cm}}+c^2-4a^2-\underline{\hspace{2cm}}=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$	6. Por el desarrollo del cuadrado de un binomio.
7. $4xc-4a^2=4a\underline{\hspace{2cm}}$	7. ¿Por qué?
8. $(xc-a^2)^2=a^2[(x-c)^2+y^2]$	8. Por factor común y por la propiedad fundamental de los radicales.
9. $x^2c^2-2a^2cx+a^4=\underline{\hspace{1cm}}-\underline{\hspace{1cm}}+\underline{\hspace{1cm}}+\underline{\hspace{1cm}}$	9. ¿Por qué?
10. $a^4-a^2c^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2$	10. Por reducción de términos semejantes.
11. $a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2$	11. ¿Por qué?
12. $1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}$	12. Por trasposición de términos.
13. $1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	13. Porque $a^2-c^2=-b^2$ (ver hipérbola) teorema de Pitágoras.

Luego la ecuación general de la hipérbola es: \_\_\_\_\_

Autor:	Uriel González
--------	----------------

# Construcción de poliedros en origami

Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Transportador, Papel delgado de colores y tijeras.

## Historia

Origami viene de las palabras japonesas ori que significa plegar y kami que significa papel. El origami es una tradición nacida en oriente a inicios de nuestra era, reservada originalmente a la nobleza y a los samurais japoneses.

Después de una difusión lenta gracias a los contactos comerciales, fue introducido en Europa y posteriormente en América, tomando impulso en el siglo pasado. Sin embargo, se puede decir que en oriente y en occidente el origami no tiene el mismo carácter, pues mientras que fue y es un arte refinado en oriente con mucho respeto por la máxima "no cortar, no pegar", no ocurre lo mismo en occidente donde el respeto a dicha máxima no es el mismo.

Actualmente se ha comenzado a estudiar más sistemáticamente al origami como medio de representación de objetos matemáticos y geométricos en particular. Por ejemplo, se ha estudiado la relación entre el origami y la topología; la relación entre los poliedros hechos con origami y las geodésicas o estructuras basadas en los diseños de Buckminster Fuller.

## Generalidades

En la clasificación del origami se pueden considerar varios aspectos: la finalidad, el tipo de papel utilizado y la cantidad de piezas utilizadas, así:

### De acuerdo a la finalidad

- Artístico: construcción de figuras de la naturaleza o para ornamento.
- Educativo: construcción de figuras para el estudio de propiedades geométricas y de números.

### De acuerdo a la forma del papel

- A papel completo: trozo de papel inicial en forma cuadrangular, rectangular o triangular.
- Tiras: trozo inicial de papel en forma de tiras largas.

### De acuerdo a la cantidad de trozos

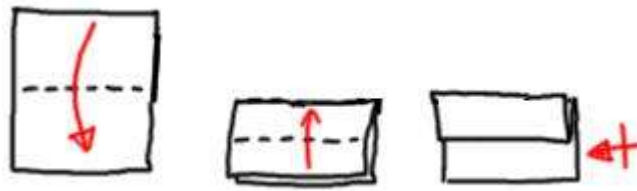
- Tradicional: un solo trozo de papel inicial. Ocasionalmente dos o tres máximo.
- Modular: varios trozos de papel inicial que se pliegan para formar unidades o módulos, generalmente iguales, que se ensamblan para formar una figura compleja.



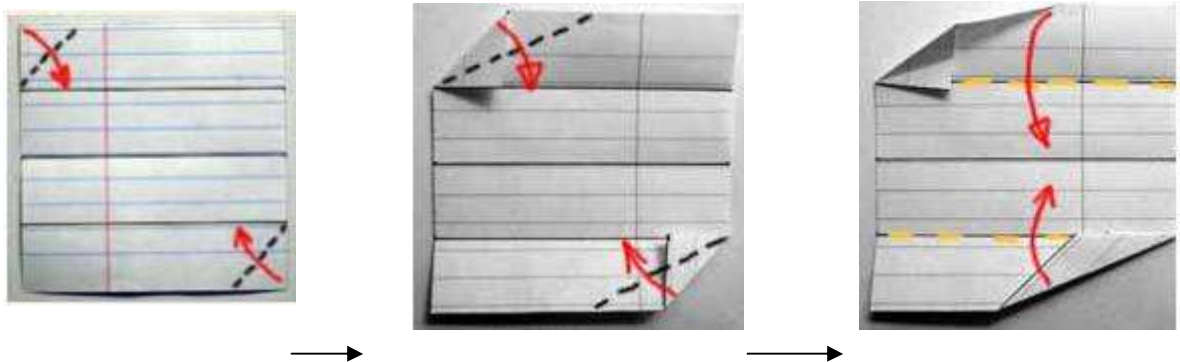
El origami es un medio, no un fin. No es suficiente proporcionar un manual ilustrado porque la riqueza va más allá: cuestionándose, estudiando propiedades, observando, analizando, conjeturando.

### Actividad 1. Construcción del módulo base

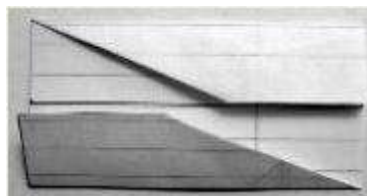
1. Toma un papel cuadrado y realiza los siguientes dobleces:



2. Desdobra lo anterior y procede de la siguiente manera:



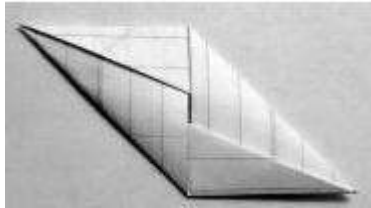
3. Tu resultado debe ser algo parecido a esto:



4. continúa con los siguientes dobleces:



5. Ahora hazle lo mismo al otro lado para obtener lo siguiente:



6. Dale vuelta al módulo y realiza los siguientes dobleces:



7. Construye 6 módulos iguales al anterior y ensámblos para obtener un cubo como el que se muestra en la figura.

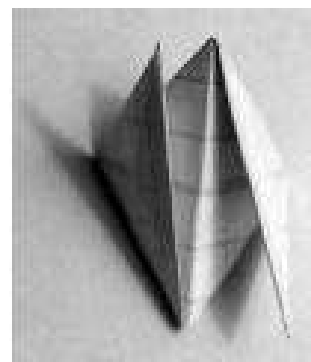


## Actividad 2. Otros cuerpos con el mismo módulo

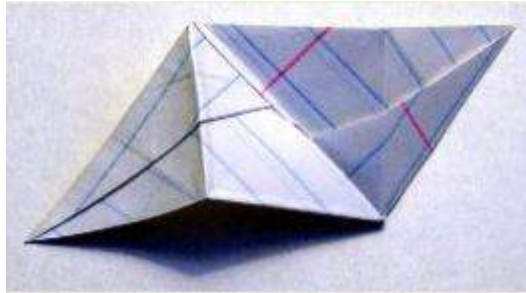
Para construir otros cuerpos debes saber cómo ensamblar 3 módulos. Para ello sigue las siguientes instrucciones:

El siguiente paso se desarrolla después del paso 6.

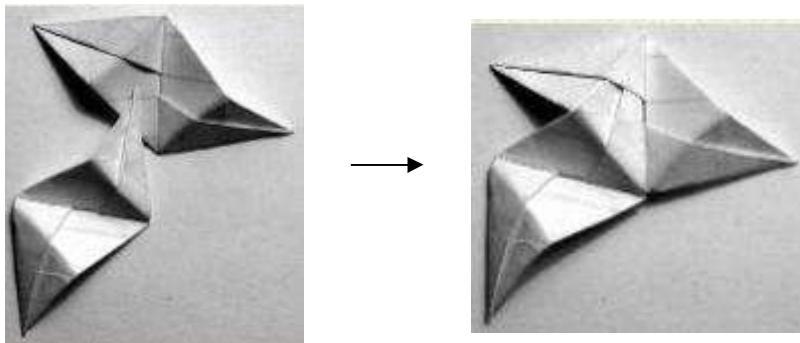
1. Dobra como se observa en la gráfica:



- Realiza tres de los módulos anteriores y ponlos sobre la mesa en la posición que indica la figura:



- Junta dos módulos como se muestra:



- Para terminar une el tercer modulo como se muestra:



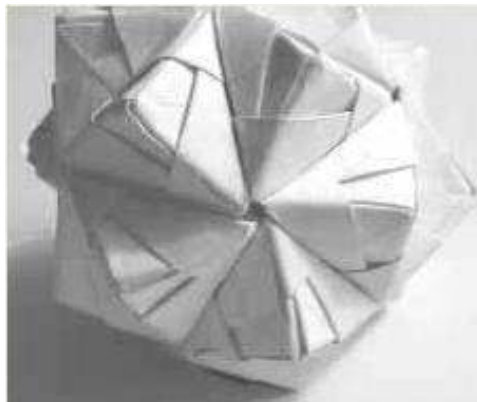
- Al final te queda una pirámide interior con medios módulos a los lados.

Actividad 3. Construcción de un icosaedro triaquis y un octaedro triaquis. Para realizarse en casa

1. Para construir el octaedro triaquis no hay más que ir montando pirámides de tal manera que alrededor de cada uno de los vértices queden cuatro pirámides. Para eso necesitaremos doce módulos. Como lo muestra la figura, donde v es vértice y c son cimas, uniéndolas obtendrás el anhelado octaedro.



2. Montando cinco pirámides alrededor de cada vértice, obtendremos esta otra figura. Para hacerla necesitaremos treinta piezas. Se llama icosaedro triaquis porque tiene veinte caras y lleva una pirámide de base triangular encima de cada cara.



Autor:	Esteban Jaramillo Jaramillo. Grupo EXPLORA
Bibliografía:	<a href="http://geocities.com/jordimastrullenque/sonobe/index.html">http://geocities.com/jordimastrullenque/sonobe/index.html</a>

# NOTAS



Los conceptos que aprendí hoy son:

---

---

---

---

¿Te gustó el taller? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

¿Te gustó la metodología? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

# TERCERA SESIÓN

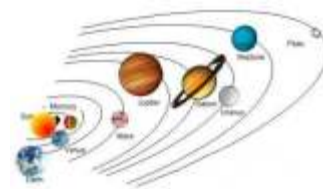
## OBJETIVO

Introducir conceptos de astronomía básica, mostrando la relación existente entre esta rama de las ciencias y la geometría.

Conceptos involucrados:

- Elipse
- Foco
- Eclíptica
- Asteroides, meteoroides, meteoros, meteoritos
- Escalas del sistema solar
- Magnitudes y unidades
- Proporciones
- Las estaciones
- Velocidades

# Nuestro Universo



Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Papel tamaño oficio, compás, tijeras, regla, lápiz, 6 metros de pita, 12 chaquiras de colores, cinta métrica.

Los seres humanos durante milenios hemos contemplado el cielo, observando las estrellas y los planetas y nos hemos preguntado a qué distancia estarían, cual sería su composición y como habrían llegado hasta allí. Se han establecido coordenadas para estos cuerpos celestes y se han analizado con la ayuda de objetos como telescopios, espectroscopios y naves espaciales, ayudando a los observadores del cielo a desarrollar completos mapas y a catalogar miles de cúmulos de estrellas nebulosas y galaxias. En la actualidad se utilizan telescopios inmensos en la tierra, telescopios espaciales, satélites sensibles y sondas planetarias. El objetivo sigue siendo el mismo, descubrir qué es el universo y por qué es como es.

La evolución de la astronomía ha sido muy notoria; por ejemplo, los planetas hace tiempo no eran más que hermanos casi desconocidos de la tierra. Ahora sabemos que los planetas son mundos independientes cada uno con una geología y meteorología únicas. Además, cada estrella presenta una historia evolutiva compleja, y se reconoce a las galaxias como inmensos sistemas estelares, independientes del nuestro.

## Orientación

Para poder observar el cielo es muy importante saber orientarse. Vamos a cuestionarnos un poco para aprender a hacerlo.

¿Cómo sabes donde queda el norte desde el lugar en donde te encuentras? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Y si fuera de noche ¿cómo te orientarías? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Descripción de nuestro Sistema Solar

Nuestro Sistema Solar está conformado por el sol, nueve planetas, uno en estudio -Sedna- y sus satélites, además de cometas, asteroides y meteoroides de variados tamaños, así como polvo y gas interplanetario, completando la familia solar.

El Sol es la estrella más cercana a la Tierra, siendo su tamaño y luminosidad, intermedios respecto a las demás estrellas del Universo. El Sol se compone básicamente de hidrógeno (70% aproximadamente), helio (30% aproximadamente) y algo más de un 1% de elementos más pesados. En su centro, que mide de unos 400.000 kilómetros de diámetro, se concentra el 60% de su masa, la que arde a más de 15 millones de grados Celsius y se contrae bajo una enorme presión. Estas condiciones generan reacciones termonucleares que por fusión nuclear convierten hidrógeno en helio. La energía generada de esta reacción se esparce por el espacio en forma de luz, calor y una gran gama de radiaciones, que pueden llegar a ser tan grandes, que a veces escapan por su superficie en erupciones periódicas (en ciclos de 11 años aproximadamente), formando lo que se conoce como manchas solares.

Los planetas son cuerpos celestes que brillan por la luz que reflejan del Sol, y circulan alrededor de él, en órbitas elípticas sobre un plano definido llamado eclíptica.

¿Por qué crees que el plano recibe este nombre? \_\_\_\_\_

---

Los antiguos griegos llamaban a los planetas "vagabundos" debido a que se movían sin seguir el estricto orden de las estrellas que parecían permanecer fijas. Los planetas se suelen clasificar en dos grupos según su cercanía al Sol: Planetas Interiores y Planetas Exteriores. Estos dos grupos están separados por una gran nube de rocas en órbita, conocidos como el Cinturón de Asteroides, que son restos de la formación de los planetas, hallados entre Marte y Júpiter; el más grande de ellos se llama Ceres y tiene alrededor de 960 x 932 kilómetros de diámetro.

Los Planetas Interiores son los más cercanos al Sol. Gozan de periodos de traslación cortos según la tercera ley de Kepler (1571-1630) que establece que "el periodo de traslación es proporcional a la distancia al Sol". Los Planetas Interiores tienen temperaturas y densidades altas y se componen básicamente de los mismos elementos. En este grupo se cuentan Mercurio, Venus, Tierra y Marte.

Los Planetas Exteriores son los más alejados del Sol, en su mayoría enormes, de poca densidad, temperaturas bajas y con grandes atmósferas gaseosas. Suelen tener campos gravitatorios fuertes lo que les permite tener sistemas de lunas o discos de polvo orbitando a su alrededor. Se cuentan en este grupo Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón y Sedna. Los dos últimos escapan a todas estas descripciones, pues se trata de mundos rocosos y pequeños. La siguiente tabla nos ilustra al respecto:



Planeta	Fuerza de gravedad Tierra=1	Composición atmosférica	Temperatura	Densidad g/cm <sup>3</sup>	Periodo de rotación	Periodo de Traslación (días terrestres)
Mercurio	0.4	He, A, Ne	-170°C a 350°C	5.4	58.65d	87.97 d
Venus	0.9	CO <sub>2</sub>	465°C	5.3	243.02d (retrogrado)	224.7d
Tierra	1.0	N,O	15°C	5.5	1d 23.93h	365.26d
Marte	0.4	CO <sub>2</sub>	-23°C	4	1.026d	686.98d
Júpiter	2.5	H, He	-150°C	1.3	0.41d(9.8h)	11.86a
Saturno	1.1	H, He	-180°C	0.7	0.44d(10.2h)	29.46a
Urano	0.9	H,He,	-221°C	1.3	0.72d(17.3h) retrogrado	84 <sup>a</sup>
Neptuno	1.2	H,He	-235°C	1.7	0.67d(16.1h)	164.8a
Plutón	0.1	Metano	-220°C	2.1	6.39d retrogrado	247.92
Sedna						10500a

Convenciones: d: días, a: años, h: horas.

### Actividad 1.

Para tener una idea general de cuán grande es el Sistema Solar, construiremos un modelo a escala del mismo. "A escala" quiere decir que utilizaremos una unidad de medida más pequeña que nos permita representar las longitudes a las que se encuentran los planetas. La unidad de trabajo propuesta será que un milímetro represente un millón de kilómetros.

1 milímetro (mm): 1.000.000km

Toma un trozo de pita de al menos 6 metros (m) de longitud y empieza a contar el número de milímetros que corresponde a cada millón de kilómetros (km) para cada planeta:

Por ejemplo:

Planeta	Distancia al sol (millones de kilómetros)
Mercurio	58
Venus	108
Tierra	150
Marte	228
Cinturón de asteroides	428*
Júpiter	778
Saturno	1430
Urano	2880
Neptuno	4494
Plutón	5900
Sedna	13.000.000

\* Distancia aproximada a Ceres, el más grande del cinturón.

Si observas con atención no hay necesidad de convertir las unidades, puesto que la tabla anterior entrega los datos en millones de kilómetros y los valores pueden tomar directamente la unidad en milímetros.

Cada vez que encuentres la distancia para un planeta dado, márcala sobre la pita amarrando una chaquirita. Continúa así hasta terminar con todo el Sistema Solar.

- ¿Qué pasa con Sedna? \_\_\_\_\_
- ¿Es posible ubicarlo en nuestra escala? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántos metros de pita necesitaríamos para ubicar este último planeta? \_\_\_\_\_

### Actividad 2.

Dibujemos nuestro Sistema Solar teniendo en cuenta el tamaño de cada planeta. Para esto utilizaremos una escala en la que cada milímetro represente 1.000 kilómetros.

$$1 \text{ mm} : 1.000\text{km}$$

Necesitaremos papel tamaño oficio, compás, tijeras, regla y lápiz.

Usando la siguiente tabla empezaremos a dibujar sobre el papel la circunferencia correspondiente a cada planeta.

Planeta	Diámetro real (km)	Radio real (km)
Mercurio	4.878	2.439
Venus	12.104	6.052
Tierra	12.755	6.378
Marte	6.790	3.395
Júpiter	142.796	71.398
Saturno	120.660	60.330
Urano	51.118	25.559
Neptuno	49.528	24.764
Plutón	2.300	1.150
Sedna	1.725	862,5
Sol	1.390.404	695.202

- ¿Qué pasa con el Sol? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas veces es más grande el diámetro de Júpiter que el de la Tierra? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas veces cabe el diámetro de la Tierra en el del Sol? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas veces cabe el diámetro de Sedna en el del Sol? \_\_\_\_\_

Asteroides

Son cuerpos rocosos más pequeños que los planetas y se clasifican en tres grandes familias dentro del Sistema Solar. Retrocediendo el tiempo, a partir de las órbitas, es posible deducir que cada familia se generó por la fragmentación de un único gran asteroide que se rompió después de un choque. La primera familia es el Cinturón de Asteroides Principal, que giran alrededor del Sol en órbitas conocidas y se encuentran entre Marte y Júpiter.

La segunda familia son los Troyanos los cuales aparecen en dos regiones en la órbita de Júpiter, un sexto de la órbita hacia adelante y un sexto hacia atrás respectivamente.

La tercera familia son los Asteroides Próximos a la Tierra, de estos se conocen unos 200 asteroides grandes, cuyas órbitas cruzan la de la Tierra y pueden llegar a golpearla.

### Meteoroides, meteoros y meteoritos

Cuando un cometa en su recorrido se encuentra en el interior del sistema solar, el sol calienta su superficie helada, la cual al evaporarse desprende miles de millones de toneladas de material de su superficie y forman en su estela un camino de detritos concentrados que llamamos corrientes de meteoroides. Algunas veces estas corrientes se vinculan a los restos generados por los choques de Asteroides. Cuando la tierra pasa a través de una corriente de meteoroides que orbita alrededor del Sol, se genera lo que llamamos lluvias y tormentas de meteoros. Si un meteoroides que se encuentra en el espacio entra en contacto con la atmósfera terrestre, la superficie de este se calienta por fricción a más de 1.100 °C, evaporándose o fundiéndose, lo cual genera una intensa luminosidad, convirtiéndose así el meteoroides en meteoros. Este espectáculo es lo que conocemos como una estrella fugaz. Si el meteoros es lo suficientemente grande para llegar hasta la superficie de la Tierra se convierte en meteoritos.

### Satélites

Además de los planetas principales, el Sistema Solar está compuesto por muchos más cuerpos celestes. Alrededor de la mayoría de los planetas giran satélites, de manera similar a la Luna en torno de la Tierra. En Astronomía, el término satélite se aplica en general a aquellos objetos en rotación alrededor de un astro, este último es de mayor dimensión que el primero y ambos cuerpos están vinculados entre sí por fuerzas de gravedad recíproca.

En general, a los satélites de los planetas principales se les llama lunas, por asociación con el nombre del satélite natural de la Tierra. Los diferentes planetas poseen distinta cantidad de lunas. El número total en el Sistema Solar es alto y aún se considera incompleto, ya que aún se encuentran nuevas lunas. No se conocen lunas en Mercurio ni en Venus y tampoco ningún satélite que posea una luna.

El número total de satélites conocidos en la actualidad en cada planeta es de 140 y se indica a continuación. Seguramente en los próximos años un número mayor de pequeños satélites serán descubiertos.

Planeta	Satélites
Mercurio	0
Venus	0
Tierra	1
Marte	2
Júpiter	40 confirmados y 23 propuestos, aún no confirmados
Saturno	30 confirmados y otros 3 aún no confirmados
Urano	27 confirmados, 6 de ellos son nombrar
Neptuno	8 confirmados y otros 5 aún no confirmados
Plutón	1
Sedna	en investigación

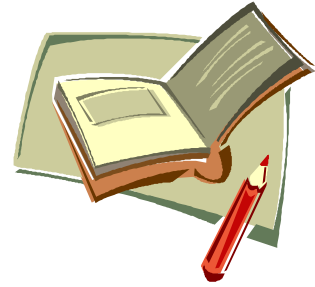
## Cometas

Los hombres primitivos ya conocían los cometas. Los más brillantes se ven muy bien y no se parecen a ningún otro objeto del cielo. Parecen manchas de luz, a menudo borrosas, que van dejando un rastro o cabellera. Esto los hace atractivos y los rodea de magia y misterio.

Los cometas son cuerpos frágiles y pequeños, de forma irregular, formados por una mezcla de sustancias duras y gases congelados. En general, la órbita de los cometas es mucho más alargada que la de los planetas. En una punta los pueden acercarse al Sol y, en la otra, alejarlos más allá de la órbita de Plutón. Cuando los cometas se acercan al Sol y se calientan, los gases se evaporan, desprenden partículas sólidas y forman la cabellera. Cuando se vuelven a alejar, se enfrían, los gases se hielan y la cola desaparece. En cada pasada pierden materia y finalmente, sólo queda el núcleo rocoso. Se cree que hay asteroides que son núcleos pelados de cometas.

Elaborado por:	Diego Vásquez y María Isabel Marín. Grupo EXPLORA 2005
Bibliografía:	<a href="http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html">http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html</a> <a href="http://pds.jpl.nasa.gov/planets/special">http://pds.jpl.nasa.gov/planets/special</a> Observar el Cielo. LEVY, David H. Editorial Planeta. Observar el Cielo II. LEVY, David H. Y otros. Editorial Planeta.

# NOTAS



Los conceptos que aprendí hoy son:

---

---

---

---

¿Te gustó el taller? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

¿Te gustó la metodología? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

# Nuestros Planetas



Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Material:	Textos para leer

## Mercurio

Es el planeta más difícil de reconocer a simple vista porque nunca se aleja más de 28 grados del Sol. Su atmósfera no sirve de barrera protectora frente a la inmensa radiación solar que recibe, por tanto no suaviza la diferencia de temperaturas: en el día tiene 350°C y en la noche tiene -170°C. Su órbita es la más excéntrica después de la de Plutón.

En 1974 y 1975 la nave espacial Mariner 10 de la Nasa hizo tres exploraciones por el planeta y tomó fotografías que mostraron la superficie llena de cráteres causados por impactos recibidos durante la prehistoria del sistema solar; además mostró que el planeta posee campo magnético. Los científicos creen que la estructura interna de Mercurio incluye un núcleo metálico, una capa rocosa intermedia, y una corteza delgada y quebradiza. Es posible que la composición de Mercurio sea alta en hierro.

Es poco lo que se sabe de Mercurio ya que sólo una nave espacial lo ha explorado. Su identificación con la mitología romana ha prevalecido hasta hoy; Mercurio era una divinidad romana, el dios del comercio que tiene el paralelismo con el dios griego Hermes, rápido mensajero de los dioses, característico por su atuendo, el casco alado y las sandalias.

## Venus

En 1993 la nave espacial Magallanes realizó la secuencia más completa de mapas de la superficie de Venus, que reveló detalles propios de zonas continentales y cráteres. Venus está cubierto por nubes de vapor de agua y ácido sulfúrico, tan densas, que no permiten ver su superficie sin sistemas de radar sofisticados, como el de la nave espacial Magallanes. La presión en Venus es 100 veces más alta que en la Tierra. Su atmósfera se compone en su mayoría por dióxido de carbono, por lo cual padece un fuerte efecto invernadero. El 70% de la superficie de Venus es una planicie de lava y el resto se reparte fundamentalmente entre dos continentes. Por ser uno de los planetas rocosos al igual que Mercurio, la Tierra y Marte, su interior está compuesto de materiales rocosos densos, como el basalto y de metales como el hierro. Venus es el sugestivo nombre de la antigua diosa romana de la belleza, el amor y la fecundidad; para los griegos, era la misma Afrodita, hija de Júpiter y Dionea.

## Tierra

Es único en la familia del Sol y por supuesto, se trata de nuestro planeta, el que habitamos. Es una frágil esfera cubierta de agua y oxígeno, llena de una vida maravillosa, variada, y hasta entonces, única. Tiene una atmósfera dinámica compuesta en un 21% de oxígeno, un 78% de nitrógeno y un 1% de otros gases. El 70% de su superficie está cubierta de agua en forma líquida o sólida. La corteza del planeta Tierra está formada por placas que flotan sobre el manto, una capa de materiales calientes y pastosos que a veces salen por grietas formando volcanes.

La densidad y la presión van aumentando hacia el centro de la Tierra. En el núcleo están los materiales más pesados: los metales, que se mantienen en estado líquido y con fuertes movimientos a causa del calor, aunque el núcleo interno es sólido. Las fuerzas internas de la Tierra se notan en el exterior. Los movimientos rápidos originan terremotos y los lentos forman plegamientos, como los que crearon las montañas. El rápido movimiento rotatorio y el núcleo metálico generan un campo magnético que junto a la atmósfera, nos protege de las radiaciones nocivas del Sol y de las otras estrellas.

## Marte

Conocido como el planeta rojo por sus tonos rosados, los romanos lo identificaban con la sangre y le pusieron el nombre de su dios de la guerra, al que los griegos llamaban Ares.

El planeta Marte tiene una superficie surcada de cráteres: además tiene signos de erosión debido a antiguas corrientes de agua que se encuentra en los delgados casquetes polares y cristales de dióxido de carbono, o en capas heladas bajo su superficie. En Marte se producen estaciones durante las cuales se puede ver cómo crece o se hunde uno de sus casquetes polares a medida que avanza un ciclo. Marte es un mundo de rocas coloradas, en donde el cielo es rojo y los ocasos son azules.

Durante las últimas tres décadas, varias sondas espaciales nos han mostrado que Marte es rocoso, frío y estéril bajo un brumoso cielo rosado. Lo más probable es que posea un núcleo denso de unos 1700 km de radio, un manto de roca fundida algo más denso que el terrestre y una delgada corteza. La densidad relativamente baja de Marte en comparación con la de los demás planetas terrestres, indica que su núcleo probablemente contiene una mayor proporción de sulfuros además del hierro y sulfuro ferroso.

## Júpiter

Este planeta lleva el nombre del dios de los dioses de la mitología romana, también conocido como Zeus en la mitología griega. Júpiter era retratado como un dios sabio y justo pero con un

fuerte temperamento; reinaba sobre la tierra y el cielo y sus atributos eran el águila, el rayo, y el cetro.

Júpiter fue el primer planeta estudiado por Galileo a través de su telescopio. Bajo la parte superior de las nubes que vemos, hay estratos de gases densos, con un núcleo pequeño y rocoso situado en el medio. La tormenta más grande de todos los planetas es la Gran Mancha Roja de Júpiter, con una medida de 50 mil km por 17 mil km. Júpiter tiene un tenue sistema de anillos invisible desde la Tierra, que está formado por partículas de polvo lanzadas al espacio cuando los meteoritos chocan con las lunas interiores del planeta.

## Saturno

En mitología romana era conocido como el padre de Júpiter. Su equivalente en la mitología griega era el dios de la agricultura llamado Cronos. Según otras fuentes, era el dios del cielo.

Observar Saturno es uno de los mejores espectáculos del cielo. Su superficie es similar a la de Júpiter, mientras que su interior suponemos que está compuesto por un núcleo rocoso de 20 mil km de diámetro rodeado por una atmósfera de 37 mil km de altura de hidrógeno molecular (etano, amoníaco y metano) y helio. Posee un juego de anillos en los que cada anillo principal está formado por muchos anillos estrechos. Su composición es dudosa, pero sabemos que contienen agua; podrían ser icebergs o bolas de nieve mezcladas con polvo. Las partículas que forman los anillos de Saturno tienen tamaños que van desde la medida microscópica hasta trozos como una casa. Con el tiempo, van recogiendo restos de cometas y asteroides.

## Urano

Dios del cielo en la mitología griega, hijo de Gea, vencido por su hijo Titán. Se cree que el planeta está formado por dos o posiblemente tres capas. Sobre la superficie está compuesta por una combinación de gases; sin embargo, el aumento de la temperatura y la presión hacen que se comporte como si fuera líquido más o menos en una tercera parte del camino hacia el centro. El resto del planeta es una mezcla caliente y fangosa de agua, metano y amoníaco, junto con elementos rocosos. Su núcleo es de hierro y níquel, al parecer de color verde azulado claro.

En 1977 se fueron descubiertos en Urano nueve anillos orbitando alrededor de él. En 1986 la visita de la nave Voyager permitió medir y fotografiar los anillos, y descubrir dos nuevos. Los anillos de Urano son distintos de los de Júpiter y Saturno. El anillo exterior denominado Epsilon está formado por grandes rocas de hielo y tiene color gris. Parece que hay otros anillos o fragmentos no muy amplios, de unos 50 metros. El disco parece liso aunque se han percibido tenues bandas oscuras.



## Neptuno

En la mitología romana, Neptuno era el dios de los mares y los terremotos, equivalente griego a Poseidón en la mitología griega.

El interior del planeta Neptuno está compuesto por roca fundida con agua, metano y amoníaco líquidos. El exterior está compuesto por hidrógeno, helio, vapor de agua y el metano, que le da el color azul. Neptuno tiene un sistema de cuatro anillos estrechos, delgados y muy tenues, difíciles de distinguir con los telescopios terrestres, que se han formado a partir de partículas de polvo, arrancadas de las lunas interiores por los impactos de meteoritos pequeños. Tiene 13 lunas; la más conocida es Tritón, cuya atmósfera se compone de nitrógeno y metano.

## Plutón

Amo de los infiernos en la mitología romana, era para los griegos Hades, dios de los muertos, hijo de Cronos y de Rea y hermano de Zeus y Poseidón. Es el planeta más alejado del sol que se conoce. Su órbita es tan excéntrica, que en ciertos puntos rebasa la órbita de Neptuno, acercándolo más al Sol que al gigante planeta, aunque nunca se cruzan debido a su inclinación de 17.4 grados respecto de la Eclíptica. Por su densidad, Plutón parece hecho de rocas y hielo.

## Sedna

El 14 de noviembre de 2003, un equipo encabezado por el investigador Mike Browne del California Institute of Technology - Caltech detectó por primera vez un posible planeta a 13 billones de kilómetros de distancia. Por su lejanía, sería un planeta muy frío y además el Sol se podría tapar con la cabeza de un alfiler desde allí. Hoy en día, telescopios de todo el mundo confirman su aparición, y el Telescopio Espacial Hubble de la NASA, tiene imágenes que confirman su movimiento entre las estrellas.

Este nuevo planeta fue denominado Sedna en honor a la diosa del mar entre los pueblos inuit, habitantes esquimales del norte de Canadá y Groenlandia, dama de las profundidades del mar y de las emociones humanas. Según el pueblo inuit, la diosa Sedna dio origen a las criaturas marinas desde una cueva congelada que ocupa en el fondo del océano.

¿De qué están compuestos los planetas interiores y los exteriores? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Cuáles planetas poseen anillos? \_\_\_\_\_

¿Cuáles son los planetas gigantes del Sistema Solar? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Cómo se puede distinguir un planeta de una estrella? \_\_\_\_\_

¿En dónde se encuentra el Cinturón de Asteroides? \_\_\_\_\_

¿Qué diferencias existen entre los asteroides y los meteoroides? \_\_\_\_\_

¿Por qué la tierra no se ve tan golpeada como la Luna? \_\_\_\_\_

¿A qué distancia se encuentra la tierra a partir del Sol? \_\_\_\_\_

¿Cómo se llama y cuánto mide el asteroide más grande ubicado en el cinturón de Asteroides? \_\_\_\_\_

¿Cuál es el planeta más pequeño? \_\_\_\_\_

Elaborado por:	Diego Vásquez y María Isabel Marín. Grupo EXPLORA 2005
Bibliografía:	<a href="http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html">http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html</a> <a href="http://pds.jpl.nasa.gov/planets/special">http://pds.jpl.nasa.gov/planets/special</a> Observar el Cielo. LEVY, David H. Editorial Planeta. Observar el Cielo II. LEVY, David H. Y otros. Editorial Planeta.

# CUARTA SESIÓN

## OBJETIVOS

Encontrar estrategias y soluciones que permitan desarrollar un pensamiento lógico y a la vez afianzar algunos conceptos de la geometría utilizando rompecabezas.

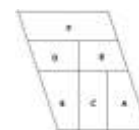
Mediante la manipulación de cubos construir cuerpos apoyados en las vistas que lo representan en el plano y construir reglas de formación (sucesiones).

Conceptos involucrados:

- Cuadrilátero
- Paralelogramo
- Trapecio
- Rectángulo
- Área
- Perímetro
- Volumen
- Vistas
- Sucesiones



# Raíz cuadrada de 10



Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia.
Materiales:	Hoja cuadriculada, lápiz y tijeras.

Procedimiento para la construcción del rompecabezas

1. Sobre la hoja cuadriculada toma una unidad de medida.
2. Ubica un punto A en la parte inferior derecha de la hoja.
3. Desde A desplázate una unidad a la izquierda y luego tres hacia arriba. Ubica en este lugar el punto B.
4. Realiza el mismo procedimiento anterior, pero ahora empezando en B, y ubica el punto C. Une los puntos A y C. (Ver Figura 1)
5. Desde C traza una recta de 9 unidades hacia la izquierda y ubica el punto D.
6. Ubica un punto E a 9 unidades a la izquierda de A. Une A con E y E con D.
7. Ubica un punto F, 2 unidades a la izquierda de C.
8. Sobre el segmento AE ubica los puntos G y H a 4 y 7 unidades respectivamente a la izquierda de A.
9. Traza el segmento FG. (Ver Figura 2.)

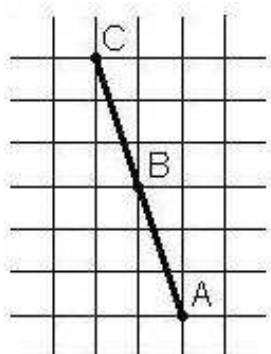


Figura 1

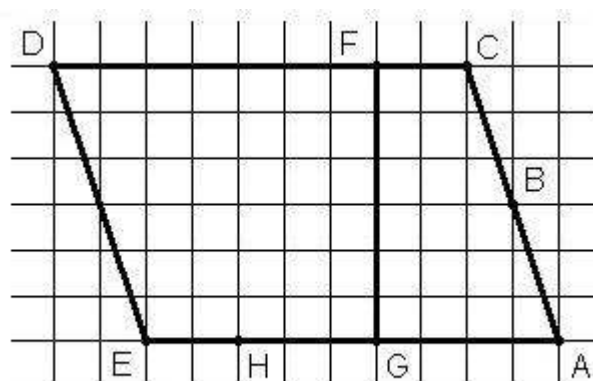


Figura 2

10. Desde C repite el procedimiento del punto 3 y ubica el punto I.
11. Repite el paso anterior desde el punto I y ubica el punto J.
12. Traza el segmento CJ.
13. Ubica el punto K a 9 unidades a la izquierda de J y traza el segmento JK.
14. Ubica el punto L una unidad a la derecha y 3 unidades hacia abajo del punto K.
15. Traza los segmentos KD, LI. (ver figura 3)
16. Traza un segmento de recta desde el punto H hasta el segmento LI.

17. Compara lo que hiciste con la figura 4 y márcalo como se muestra y recórtalo.

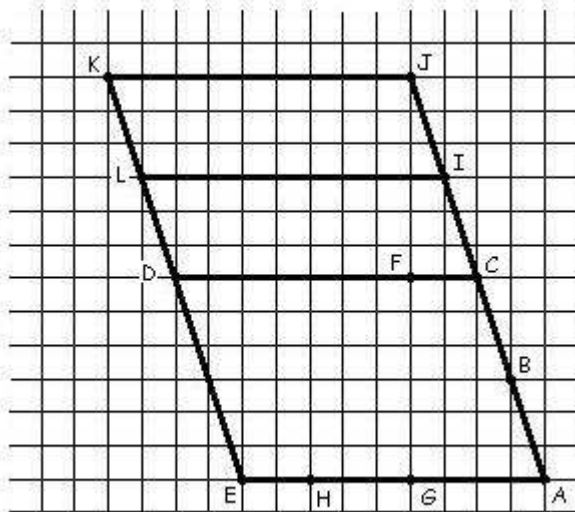


Figura 3

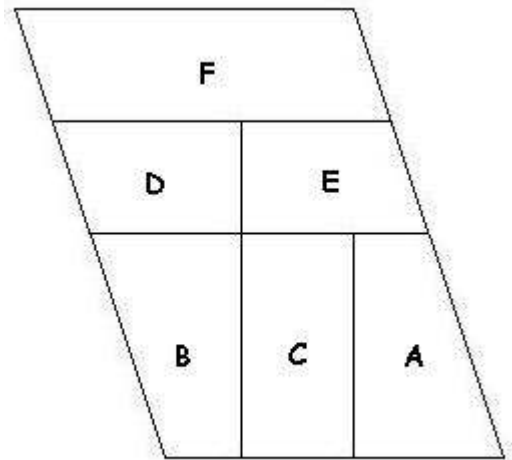


Figura 4

Observa todas las piezas que obtuviste y responde:

¿Cuántos lados tiene cada figura? \_\_\_\_\_. De acuerdo a ese número, ¿qué nombre le darías a este conjunto? \_\_\_\_\_

1. Identifiquémoslas

Ejemplo: A,B: Trapecios rectangulares escalenos congruentes.

C: \_\_\_\_\_

D,E: \_\_\_\_\_

F: \_\_\_\_\_

¿Qué pieza obtienes al unir D y E? \_\_\_\_\_

Manipula las seis figuras y realiza una clasificación de cuadriláteros posible, sin unirlas.

- ¿Cuántos conjuntos encontraste? \_\_\_\_\_ ¿Cuáles? \_\_\_\_\_
- Ahora define las características de cada conjunto:

---



---



---



---



---

2. Al asimilar nuevos conceptos, los acomodo en las estructuras establecidas, transformando éstas.

Vivenciémoslo:

Con A y B, construye un paralelogramo que no sea cuadrado ni rectángulo.

Observa y define las características del paralelogramo:

---

---

---

Ahora, agrega C conservando la forma de paralelogramo. ¿Qué se amplía? \_\_\_\_\_

---

---

Agrega, D y E, conservando la forma de paralelogramo. ¿Qué pasa con los lados? \_\_\_\_\_

---

---

¿Qué pasa con la estructura? \_\_\_\_\_

Ahora agrega F conservando la forma. ¿Qué se modifica? \_\_\_\_\_

---

---

Conclusiones. \_\_\_\_\_

---

---

Con A y B construye un rectángulo.

Define las características de este caso particular del rectángulo.: \_\_\_\_\_

---

---

Ahora, agrega C conservando que sea un rectángulo. ¿Qué se modifica? \_\_\_\_\_

---

---

Agrega D y E, conservando la forma de rectángulo. Describe los detalles que hay que tener en cuenta para agregar D y E: \_\_\_\_\_

---

---

Por último, agrega F conservando la forma. Recuerda que  $D + E = F$ .

Usa la congruencia de la suma de lados para hacer acomodaciones.  
Cambia \_\_\_\_\_ y el \_\_\_\_\_ pero no la \_\_\_\_\_.

Continuemos con los cuadriláteros.

Con A y B construye un trapecio isósceles (lados inclinados iguales)

Agrega C. ¿Qué sucede? \_\_\_\_\_

Luego, agrega D y E, conservando la forma de trapecio isósceles. Anota lo que tuviste que hacer. \_\_\_\_\_

Por último, agrega F, conservando la forma. Recuerda la congruencia con D y E. ¿Qué varía? \_\_\_\_\_

Preguntas.

- ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros? \_\_\_\_\_
- Los lados paralelos de un trapecio se llaman BASE MAYOR y BASE MENOR. Si los lados no paralelos de un trapecio son congruentes el trapecio se llama \_\_\_\_\_
- Cuando un paralelogramo tiene TODOS los lados congruentes se llama \_\_\_\_\_ y cuando tiene todos los ángulos congruentes (rectos) se llama \_\_\_\_\_
- Un paralelogramo que es simultáneamente rombo y rectángulo se llama \_\_\_\_\_
- Si uno de los lados no paralelos de un trapecio es perpendicular a las bases, el trapecio se llama \_\_\_\_\_
- ¿Qué es base media de un trapecio y qué propiedad tiene? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué crees que este juego se llama Raíz cuadrada de 10? \_\_\_\_\_

Elaborado por:	Guía Raíz de 10 elaborada por Miguel Monsalve G., Virginia Castaño C., Carlos Julio Echavarría H., Nelson Ospina A.
----------------	---



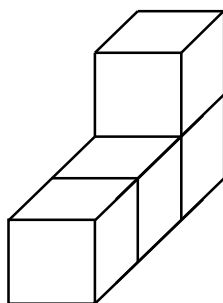
## Jugando con Cubos

Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia.
Materiales:	Cubos

Si miramos a nuestro alrededor encontraremos muchos objetos que ocupan un espacio determinado. La magnitud que nos indica cuánto espacio es ocupado por el objeto la llamamos volumen.

Dependiendo de la forma del objeto se puede obtener su volumen de distintas maneras. El cuerpo u objeto cuyo volumen es más sencillo de establecer es el cubo.

Toma cuatro cubos y construye el cuerpo que se muestra a continuación:



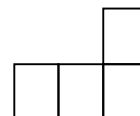
Es una práctica común representar los cuerpos en el plano mediante dibujos de lo que se observa por cada una de sus caras. A esta representación se le conoce con el nombre de vista. A continuación, se muestran las vistas correspondientes al cuerpo que construiste:



Vista superior



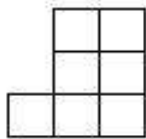
Vista frontal



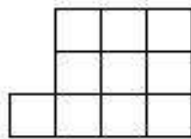
Vista lateral derecha

Vamos a usar varios cubos para formar cuerpos de diferentes formas y tamaños.

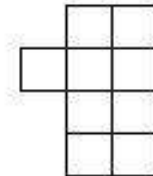
1. Para el primer cuerpo que vamos a construir, alguien tomó estas fotografías:



FRONTAL



DERECHA



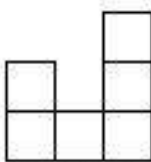
SUPERIOR

Ten en cuenta que:

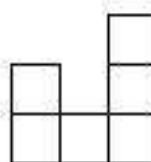
- Si dos caras se unen, esta unión debe ser completa y no parcial.

Construye el cuerpo al que corresponden. ¿Cuál es su volumen? \_\_\_\_\_  
 ¿Cuántos cuadrados puedes tocarle? \_\_\_\_\_ ¿Crees que sólo pueden corresponder a un solo arreglo? \_\_\_\_\_.

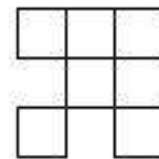
2. Para las siguientes fotografías o vistas, construye un cuerpo con el máximo y el mínimo de cubos posibles. Anota para cada caso el volumen y el área superficial.



FRONTAL



DERECHA



SUPERIOR

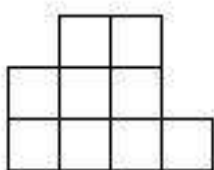
Máximo Volumen = \_\_\_\_\_

Área superficial = \_\_\_\_\_

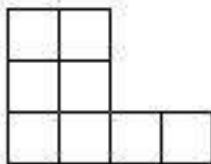
Mínimo Volumen = \_\_\_\_\_

Área superficial = \_\_\_\_\_

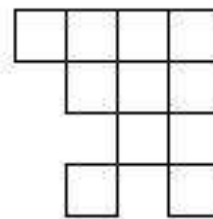
3. Construye con 16 cubos un cuerpo cuyas vistas sean las siguientes:



FRONTAL



IZQUIERDA

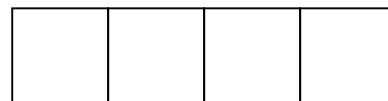
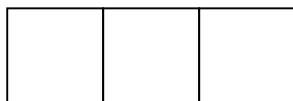
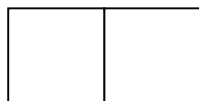
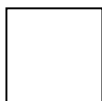


SUPERIOR

Área superficial = \_\_\_\_\_

Dibuja la vista derecha.

4. Construye y observa con atención los siguientes cuerpos:



Sigue agregando un cubo a cada cuerpo y completa la siguiente tabla:

Volumen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Área superficial													

- ¿Qué observas? \_\_\_\_\_
- ¿Podrías decir la regla para obtener el área superficial de un cuerpo de esta forma, construido con cualquier cantidad de cubos? \_\_\_\_\_
- Intenta construir con el mismo número de cubos, cuerpos diferentes. ¿El área superficial cambia? \_\_\_\_\_
- Para un volumen de 10, construye dos cuerpos tal que uno tenga un área superficial de 36 y el otro un área superficial de 40. Elabora las tres vistas para cada uno de los cuerpos.

Frontal

Derecha

Superior

Ahora intenta obtener todas las posibles áreas superficiales para un mismo número de cubos; cada cubo debe compartir al menos una cara con algún otro cubo. Comienza desde 1 y escribe lo que obtienes en esta tabla:

Número de cubos	Área superficial	Posibilidades de área superficial	Máxima área	Mínima área
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

- ¿Qué relación encuentras entre estos resultados y los obtenidos en la primera tabla? Escribe tu respuesta. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Elaborado por:	Blanca Adriana Botero
Modificado por:	Carlos Julio Echavarría

# NOTAS



Los conceptos que aprendí hoy son:

---

---

---

---

¿Te gustó el taller? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

¿Te gustó la metodología? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

# QUINTA SESIÓN

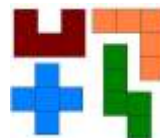
## OBJETIVOS

1. Manipular los rompecabezas de forma lógica para encontrar diferentes soluciones en el acoplamiento de las figuras.
2. Hacer un acercamiento de forma lúdica al álgebra, utilizando material para organizar áreas y representarlas de la manera más simple en un rectángulo.

Conceptos involucrados:

- Rectángulo
- Cuadrado
- Área
- Perímetro
- Factorización
- Combinatoria
- Álgebra

# Pentominós



Proyecto:	Matemáticas y Ciencias Básicas en Antioquia.
Materiales:	Cubos, dominó, pentominós, papel cuadriculado.

## Acertijos con fichas de dominó

El juego de fichas de dominó más antiguo que se conoce fue descubierto en 1922 en la tumba del faraón egipcio Tutankamón, en la ciudad de El Cairo. Todo parece indicar que en realidad el dominó se originó en China y fue traducido en Europa por mercaderes venecianos en el siglo XIV o XV de nuestra era. Desde Italia fue llevado a Francia, y se cree que los ingleses tuvieron las primeras noticias de él por prisioneros de guerra franceses durante las guerras napoleónicas a principio del siglo XIX.

Este juego de fichas se conoce también como el Seis Doble, ya que ésta es la ficha mayor del juego.

¿Por qué en un dominó cuya máxima ficha es 6/6, el número de fichas es 28?

Realiza los acertijos presentados a continuación con el juego.

- ✓ Toma las seis fichas menores del juego: la 0/0, la 0/1, la 0/2, la 1/1, la 1/2 y la 2/2 y ponlas en un cuadrado, de manera que cada lado del cuadrado contenga el mismo número de puntos.
- ✓ Usando las mismas seis fichas que en el acertijo anterior, forma un rectángulo, de manera que cada uno de sus cuatro lados contenga el mismo número de puntos.

## Pentominós

Los pentominós fueron presentados al mundo por el matemático californiano Salomon W. Golomb, en un artículo publicado en la revista American Mathematical Monthly en 1954.

Partiendo de la definición de una ficha de dominó como dos cuadrados conectados simplemente (unidos por los bordes), Golomb acuñó la palabra “poliominó” para definir el tipo de formas construidas por cuadrados conectados.

Pensemos en la manera como Golomb denominó la unión de los siguientes cuadrados:

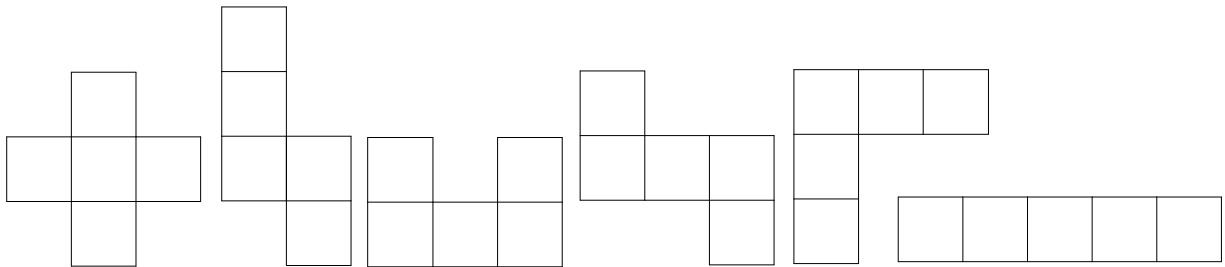
- 1 sólo cuadrado \_\_\_\_\_
- 2 cuadrados conectados \_\_\_\_\_
- 3 cuadrados conectados \_\_\_\_\_
- 4 cuadrados conectados \_\_\_\_\_
- 5 cuadrados conectados \_\_\_\_\_
- 6 cuadrados conectados \_\_\_\_\_

y así sucesivamente.

De la familia de los "poliominós", el "pentominó" es el que ha atraído el mayor interés debido a su considerable potencial recreativo.

Hay doce maneras distintas en que cinco cuadrados pueden unirse para formar un "pentominó", estas formas constituyen el juego de Pentominós y pueden comprarse en una tienda o hacerse en casa.

Algunas de las doce piezas del juego tienen formas como éstas:



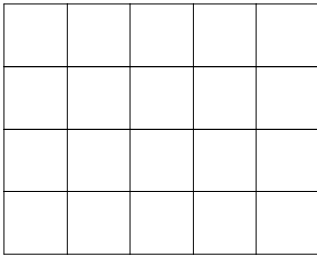
Encuentra las otras seis formas de pentominós para así llegar a formar la base de varios interesantes acertijos:





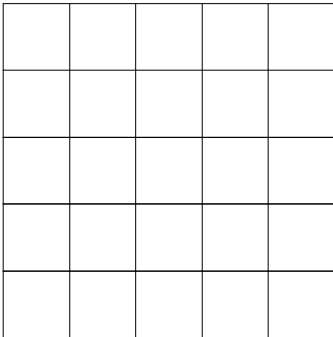
Ahora pondremos en práctica nuestra habilidad. Utilizando las piezas del pentominó, encuentra la solución a cada ejercicio y dibújala en la cuadrícula que aparece a continuación del mismo. Escribe al frente de cada uno el área y el perímetro correspondiente.

1. Usando cuatro pentominós, forma un rectángulo de 4 x 5 cuadrados.



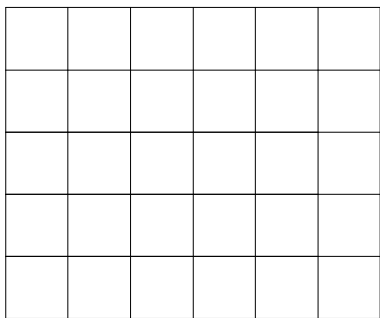
Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

2. Usando cinco pentominós, forma un cuadrado de 5 x 5.



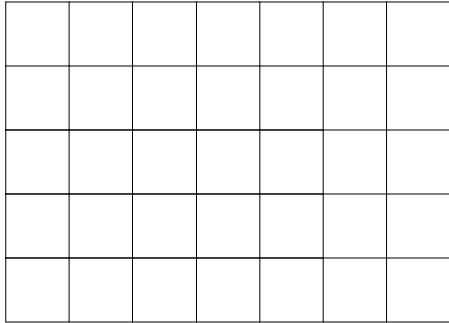
Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

3. Usando seis pentominós, forma un rectángulo de 5 x 6.



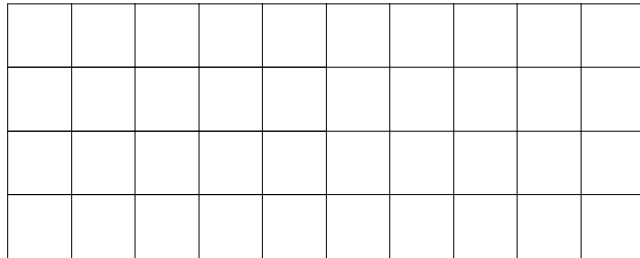
Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

4. Usando siete pentominós, formar un rectángulo de 5 x7.



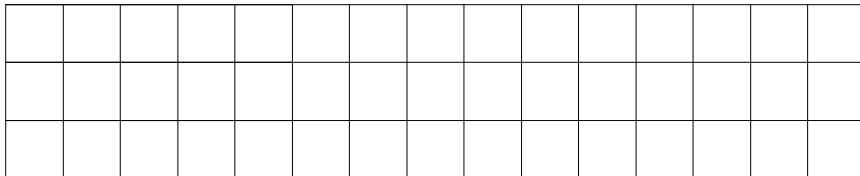
Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

5. Usando ocho pentominós, formar un rectángulo de 4 x10.



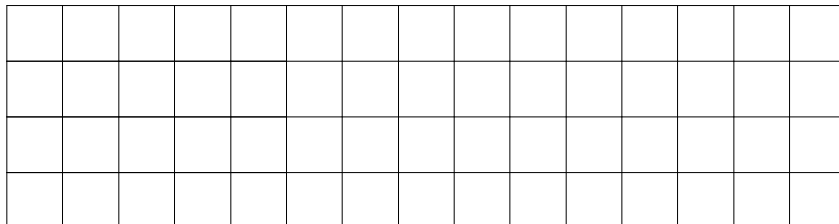
Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

6. Usando nueve pentominós, formar un rectángulo de 3 x15.



Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

7. Usando doce pentominós, formar un rectángulo de 4 x15.



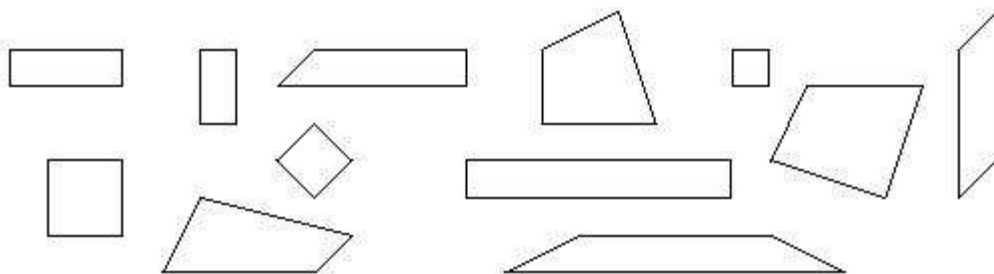
Área: \_\_\_\_\_ perímetro: \_\_\_\_\_

Elaborado por:	Miguel Monsalve G. y Johanna P. Yanet O. Julio de 2001
Bibliografía:	Los Grandes Acertijos Clásicos, Brandereth Gyles, Compañía General de Ediciones,S.A, México, 1987.

## Áreas mágicas

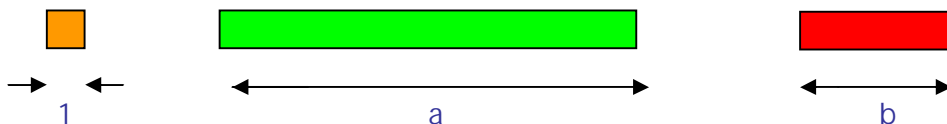
Proyecto:	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales:	Regletas de áreas mágicas

1. En el siguiente gráfico selecciona entre los cuadriláteros, los rectángulos(r) y los cuadrados(c).



2. Completa:

- ✓ El área de un cuadrado se halla: \_\_\_\_\_
- ✓ El área de un rectángulo se halla: \_\_\_\_\_



Termina de llenar la tabla:

Figura	Color	Área
Cuadrado pequeño	Naranja	$1 u^2$
Rectángulo 1		
Rectángulo 2		
Rectángulo 3		
Cuadrado mediano		
Cuadrado grande		

3. Forma los rectángulos correspondientes a las áreas que se te indica, júntalos (suma sus áreas) para formar otro rectángulo, con todos los que tenías:

Área 1	Área 2	Área 3	Área 4	Área final
$2 \times 1$	$2 \times 5$	$2 \times 3$		
$2 \times 3$	$3 \times 6$	$3 \times 3$		
$1 \times a$	$2 \times a$	$4 \times a$		
$a \times b$	$5 \times b$	$2 \times a$	10	
$a \times b$	$3 \times a$	$5 \times b$	15	
$a \times b$	$3 \times b$	$2 \times a$	6	
$a \times b$	$4 \times a$	$2 \times b$	8	
$a \times a$	$5 \times a$	6		
$b \times b$	$4 \times b$	3		
$a \times a$	$6 \times a$	8		
$b \times b$	$6 \times b$	9		
$a \times a$	$8 \times a$	16		
$b \times b$	$3 \times b$	2		
$a \times a$	$-5 \times a$	6		
$b \times b$	$-2 \times b$	1		
$a \times a$	$-7 \times a$	12		
$b \times b$	$-3 \times b$	2		
$a \times a$	$-a \times 1$			
$b \times b$	-1			
$a \times a$	-4			
$b \times b$	$4 \times b$	-12		
$a \times a$	a	-2		
$a \times a$	$2 \times a$	-15		
$a \times a$	$-2 \times a$	-3		
$a \times a$	$-2 \times a$	-8		
$a \times a$	$-3 \times a$	-10		
$2 \times a \times a$	$7 \times a$	3		
$3 \times b \times b$	$8 \times b$	4		
$3 \times a \times a$	$-8 \times a$	4		
$2 \times b \times b$	$-3 \times b$	1		
$3 \times a \times a$	$a \times 1$	-2		
$3 \times b \times b$	$5 \times b$	-2		
$3 \times a \times a$	-a	-4		
$2 \times a \times a$	$-2 \times a$	-12		

Elaborado por:	Elizbeth Montoya y Juan David Montoya. 1999
Bibliografía:	La Construcción matemática, Z. P. Dienes, E. W. Golding. Editorial Vicens-Vives, Barcelona, España, 1970.

# NOTAS



Los conceptos que aprendí hoy son:

---

---

---

---

¿Te gustó el taller? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---

¿Te gustó la metodología? \_\_\_\_\_ ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

---