

Origami y geometría

Cuadernillo de Campo 



Origami y geometría

Este Cuadernillo es posible gracias a la coordinación del Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA y la orientación académica del Grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín.

CUADERNILLO DE CAMPO ORIGAMI Y GEOMETRÍA
Aula Taller de Matemáticas

Coordinada por
Carlos Julio Echavarría
Lina María Jaramillo

Elaborado por
Sara María Velásquez López
Biviana María Álvarez
Alexandra Alzate Correa
Carlos Julio Echavarría
Karina Cuervo
María Isabel Marín
Víctor Hugo Valencia
Juan Santiago Londoño
Hugo Alejandro Herrera
Ivonne Ortega Echeverri
Walter Marín Serna
Alejandro Cadena Isaza
Diego Vásquez

Coordinación general
Santiago Echavarría Escobar
Director
Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA

Coordinación editorial
Área de Comunicaciones
Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA

Primera edición
ISBN en trámite
Medellín, abril de 2007.
Impreso en Colombia

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta publicación, sin la autorización expresa del Centro de Ciencia y Tecnología de Antioquia - CTA.

Cuadernillo de Campo

Este cuadernillo pertenece a _____

de la institución educativa _____

del municipio de _____

y servirá para disfrutar del tiempo en el Aula Taller

de Matemáticas del _____ del mes de _____

al _____ del mes de _____ de _____

Origami y geometría

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN	2
I. Poliedros regulares convexos	3
Breve historia del origami	5
Símbolos del origami	7
Construcción del cubo en cartulina	9
Cubo e icosadro estrellado en origami. Módulo sonobe	11
Cubo e icosadro estrellado	14
en origami. Variación del módulo sonobe	14
Cubo en origami	17
Cubo truncado en origami	20
Construcción del tetraedro, octaedro	23
e icosaedro en cartulina	23
Tetraedro, octaedro e icosaedro en origami. Módulo triangular de arista	25
Octaedro en origami. Módulo zeta	29
Octaedro en origami. Módulo giroscopio	33
Construcción del dodecaedro regular en cartulina	35
Dodecaedro en origami. Módulo phizz	37
Dodecaedro en origami	41
Icosaedro y octaedro en origami	43
II. Poliedros regulares no convexos	47
Gran y pequeño dodecaedro estrellado en origami. Módulo zeta	51
Gran dodecaedro	53

PRESENTACIÓN

El lema de las Aula Taller Explora "aprender haciendo y divertirse aprendiendo", invita al aprendizaje de forma lúdica, involucrando la experimentación y la manipulación de objetos. Bajo este esquema, quisimos introducir la enseñanza de los cuerpos geométricos a partir del doblado de papel y del uso de la regla y el compás.

En el presente cuadernillo se construyen los cinco poliedros regulares convexos y tres de los cuatro poliedros regulares no convexos que existen, mediante la técnica Origami modular. Esta técnica consiste en elaborar figuras decorativas, o en nuestro caso, cuerpos geométricos, a partir de la unión o ensamble de varios módulos iguales.

La técnica del Origami modular tiene ventajas que la consideran como una clase de matemáticas¹, porque involucra el uso de habilidades motrices, de razonamiento, observación, análisis y además de pensamiento espacial.

A partir de la construcción de los diferentes cuerpos propuestos, te sentirás motivado hacia el estudio de la geometría, porque:

- Analizarás las propiedades no sólo de los polígonos (triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, etc.), sino también de los poliedros (cubo, tetraedro, dodecaedro, etc.).
- Ejercitarás tu destreza manual y el pensamiento espacial.
- Conectarás el estudio de varias áreas como la matemática, la geometría y las artes.
- Podrás trabajar en equipo y sin hacer distinciones de edad.

Este cuadernillo de campo ha sido desarrollado por los integrantes del Grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín y por los facilitadores del Grupo Explora, para trabajar según la metodología de las Aulas, dentro y fuera de ellas.

Para nosotros es muy importante contar con tu presencia. Bienvenido siempre a las Aulas Taller.

¹ GONZÁLEZ GONZÁLEZ, Noraísa y LARIOS OSORIO, Víctor. Origami modular: una oportunidad para estudiar poliedros en secundaria.

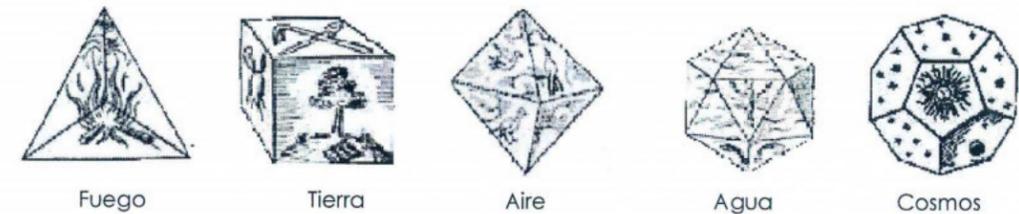
I. Poliedros regulares

convexos



Poliedros regulares convexos

El significado inicial de la palabra poliedro proviene de los términos griegos Πολυς (mucho) y εδρα (plano). En la Grecia antigua se representaron los elementos de la naturaleza con **cinco poliedros regulares convexos** conocidos como los sólidos platónicos, llamados así por el papel que tiene en el diálogo de Platón (Timeo) en donde se relacionan los cuatro primeros sólidos Platónicos y los cuatro elementos primarios: fuego, tierra, aire y agua. Del quinto poliedro regular, el dodecaedro, dice: "Quedaba aún una sola y única combinación; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final".



Cada uno de estos cuerpos está constituido por un sólo polígono regular que puede ser triángulo equilátero, cuadrado o pentágono.

No se sabe exactamente en que época llegaron a conocerse estos poliedros; sólo existen algunos vestigios arqueológicos hallados en las tierras altas de Escocia (ver gráfica). Son piedras esculpidas que recuerdan a algunos poliedros (cubo, icosaedro, dodecaedro, entre otros) y que al parecer, pudieron ser usados como dados, elementos de juego o para decoración.



Restos neolíticos encontrados en Escocia aproximadamente 2000 años antes de Cristo.

Algunas de las culturas antiguas conocían y utilizaban en sus obras arquitectónicas, estos cuerpos como elementos geométricos. Sin embargo, fue en Grecia donde se propuso el estudio metódico de los poliedros y se demostró que existen sólo cinco, que son: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

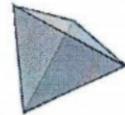
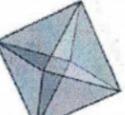
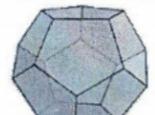
Los poliedros también han sido utilizados a lo largo de la historia como elementos decorativos y en obras de arte. La **papiroflexia**, por ejemplo, que es el arte de origen

japonés de doblado de papel; es una técnica artística que ha usado, de alguna forma, las estructuras poliédricas como elementos creativos.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS

Vamos a analizar algunas de las características geométricas de los poliedros, completando la siguiente tabla. Ten en cuenta que:

- Una **cara** es cada uno de los polígonos que conforman el poliedro.
- Una **arista** es la intersección de dos caras.
- Un **vértice** es el punto donde confluyen tres o más aristas.
- Un **ángulo diedro** es el ángulo formado por la unión de dos caras.
- Un **ángulo poliedro** es el ángulo formado por la unión de tres o más caras.

Poliedro regular	Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Modelo					
Nº caras					
Nº vértices					
Nº aristas					
Nº ángulos diedros					
Nº ángulos poliedros					

El matemático suizo Leonard Euler (1707-1783), demostró que en todo poliedro simple, es decir, sin orificios, el número de caras más el número de vértices menos el número de aristas, siempre es igual a 2. Escrito de otra forma:

$$C + V - A = 2.$$

Esta es la **Relación de Euler**.

Donde: C = Número de caras, V = Número de vértices, A = Número de aristas.

Compruébalo con los cinco poliedros regulares.

Elaborado por	Biviana María Álvarez. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: Historia de un poliedro. Edith Padrón Fernández. Universidad de La Laguna. http://www.gt.matfun.ull.es/divulgacion/Poliedros1.doc • http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_poliedros_de_Euler • http://www16.brinkster.com/mentesy maquinas/platon_solidos.gif • centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates12/opciones/Mundo%20Poliedros/Algo%20historia.htm • www.luventicus.org/articulos/03Tr001/index.html

Breve historia del origami

El **origami** es el arte Japonés del plegado de papel. Proviene de las palabras japonesas **ori** que significa doblar (plegar) y **gami** que significa papel. Este arte estaba reservado principalmente a las clases altas, puesto que en la época de su creación el papel era demasiado escaso. El origami es una ocupación apasionante para aquel que siente placer en las figuras y las formas

Luego de una difusión lenta y gracias a los contactos comerciales entre Oriente y Occidente, el origami fue introducido en Europa y posteriormente en América. Sin embargo este arte tomó un rumbo diferente, puesto que mientras que en Oriente se respeta la máxima "no cortar, no pegar", en Occidente no ocurre lo mismo. Además de esto, en Occidente es llamado **papiroflexia** (papiro = papel, flexia = doblar).

El origami puede ser clasificado según su finalidad, la forma del papel o la cantidad de trozos que se utilizan para armar una figura, así:

De acuerdo con la finalidad:

- **Artístico:** construcción de figuras de la naturaleza o para ornamento.
- **Educativo:** construcción de figuras para el estudio de propiedades.

De acuerdo con la forma del papel:

- **Papel completo:** trozo de papel inicial en forma cuadrangular, rectangular o triangular.
- **Tiras:** trozo inicial de papel en forma de tiras largas.

De acuerdo con la cantidad de trozos:

- **Tradicional:** un solo trozo de papel inicial, u ocasionalmente dos o tres.
- **Modular:** varios trozos de papel inicial que se pliegan para formar unidades (módulos), generalmente iguales, que se ensamblan para formar una figura compleja.

ORIGAMI MODULAR

Dentro del origami modular se pueden clasificar los módulos de acuerdo con la estructura del poliedro que forman. Según esto, se distinguen tres tipos de módulos:

1. **Módulos basados en las aristas.** Por lo general son los de ensamblaje más sólido. Cada módulo corresponde a una arista, y suelen presentar caras perforadas, que permiten ver el interior.
2. **Módulos basados en las caras.** Los empalmes suelen ser más débiles, lo cual se debe a que las caras se juntan entre sí de dos en dos, mientras que las aristas se juntan de más en más en cada vértice.
3. **Módulos basados en los vértices.** Los más importantes son de tipo giroscopio. Dentro de este tipo, se pueden clasificar por el grado: los que agrupan aristas de 3 en 3, de 4 en 4, y así sucesivamente.

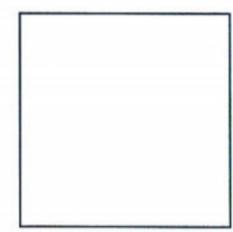
Elaborado por	Alexandra Alzate Correa. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • http://www.pajarita.org/aep/articulos/ARTIC6-3.PDF • http://www.netverk.com.ar/~halgall/origami1.htm • http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html

Símbolos del origami

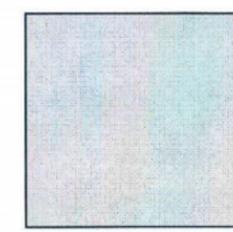


Proyecto Aula Taller Explora de Matemáticas

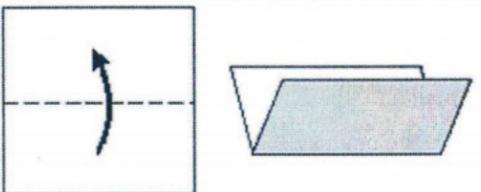
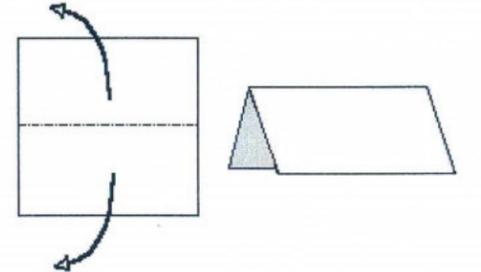
Para que sea más fácil seguir las instrucciones, te presentamos los símbolos que utilizaremos en la construcción de los diferentes módulos:

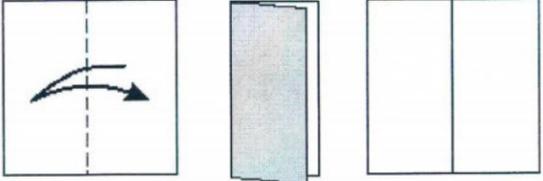
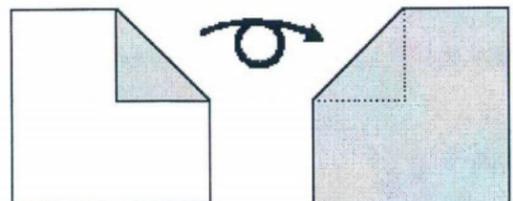
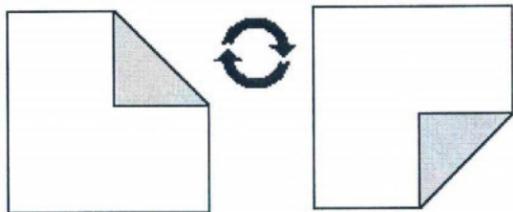
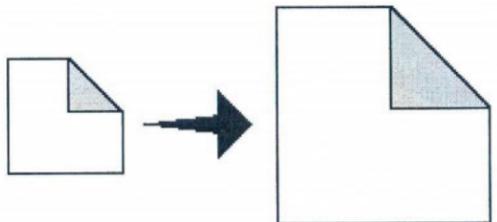
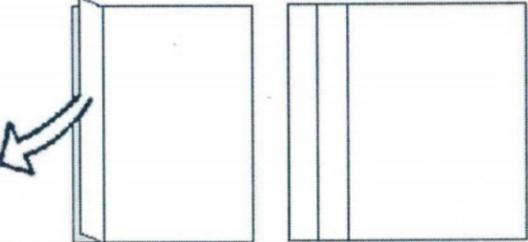


Anverso del papel



Reverso del papel

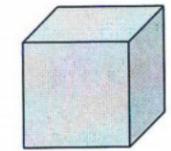
	Símbolo	Gráfico explicativo
Líneas	Valle 	
	Monte 	
	Rayos X 	Indica los dobleces que no se observan en la parte delantera del módulo
Flechas		Doblar
		Doblar hacia atrás

<p>Doblar y desdoblar</p> 	
<p>Dar vuelta al módulo</p> 	 <p>Observa que al dar vuelta la línea de rayos X permite saber qué doblez hay detrás.</p>
<p>Girar en el plano</p> 	
<p>El módulo se verá agrandado</p> 	
<p>Desdoblar</p> 	
	<p>Repetir lo mismo aquí</p>

Flechas

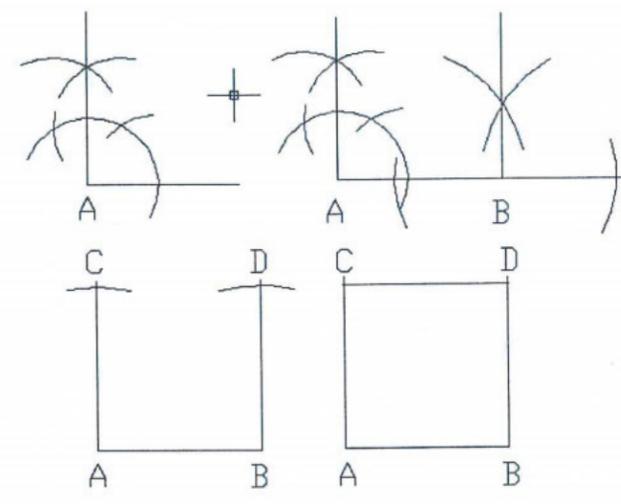
<p>Elaborado por</p>	<p>Sara María Velásquez L. Mayo de 2006.</p>
<p>Referencias</p>	<ul style="list-style-type: none"> • http://www.geocities.com/rachel_katz/origami/symbols.htm • http://www.origamikoi.com.ar/apunte07.html

Construcción del cubo en cartulina

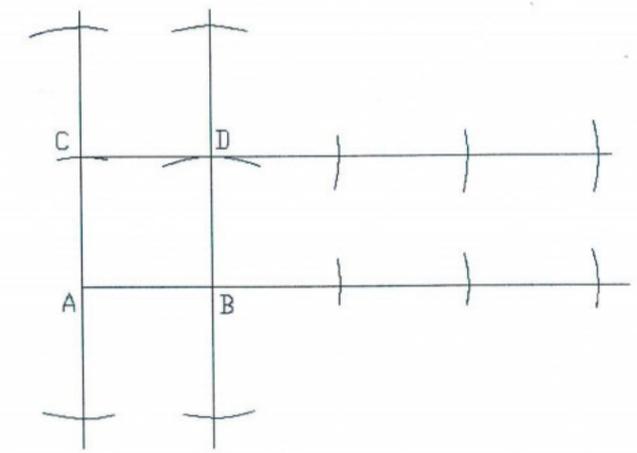


Proyecto	Matemáticas y Física Básicas en Antioquia
Materiales	Papel, cartulina, pegante, regla, tijeras y compás de precisión

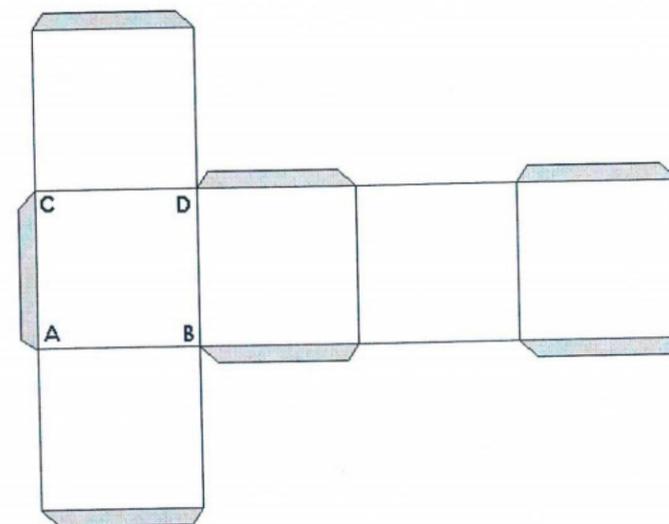
ACTIVIDAD 1: Observa con atención y describe la siguiente secuencia que nos ilustra el proceso de construcción del cuadrado utilizando regla y compás.



ACTIVIDAD 2: Teniendo en cuenta lo aprendido hasta el momento, analiza el resto de la construcción del hexaedro regular o cubo.

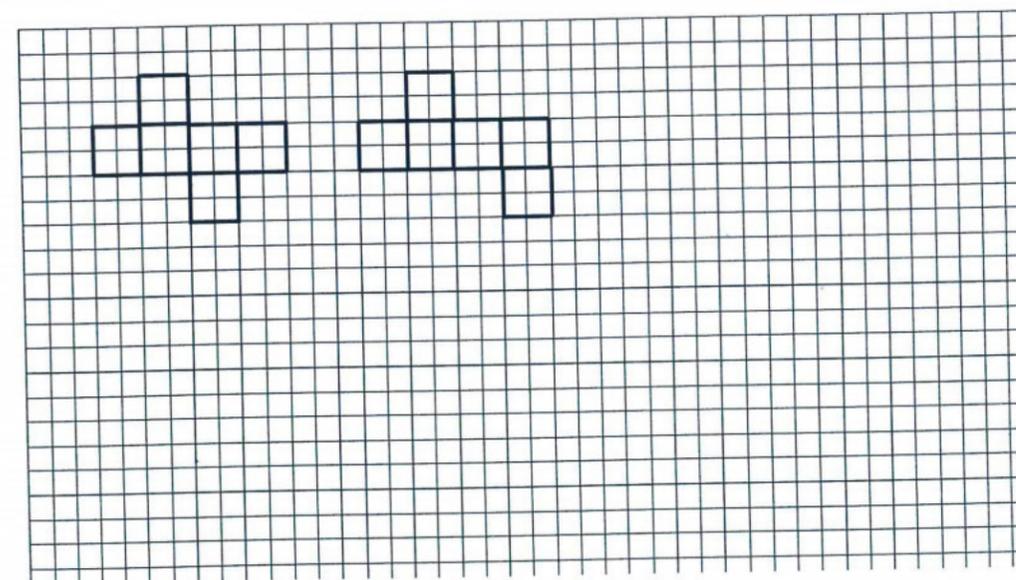


Esta es la plantilla del cubo. La parte que aparece sombreada corresponde a las pestañas, lugar en el que deberá ir el pegante.



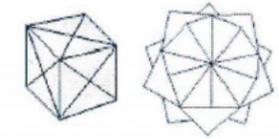
ACTIVIDAD 3: Construye un cubo cuya arista sea los $\frac{3}{2}$ de AB.

ACTIVIDAD 4: Es posible disponer los cuadros de forma diferente, de manera que puedas construir el cubo, como el mostrado en la actividad 2. Encuentra los otros arreglos y muéstralos a continuación, tal como aparece en la cuadrícula:



Elaborado por Carlos J. Echavarría y Karina Cuervo. Julio de 2000.

Cubo e icosadro estrellado en origami. Módulo sonobe



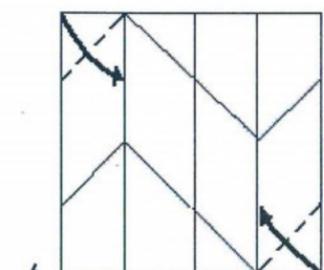
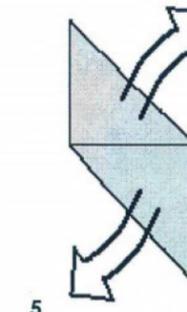
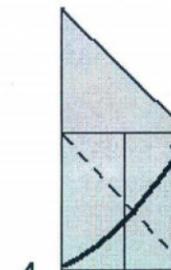
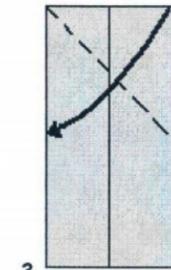
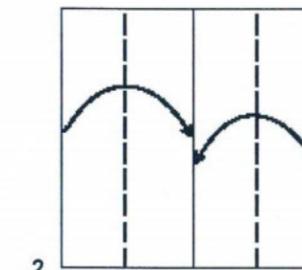
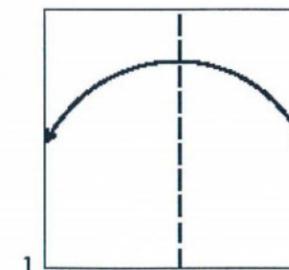
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

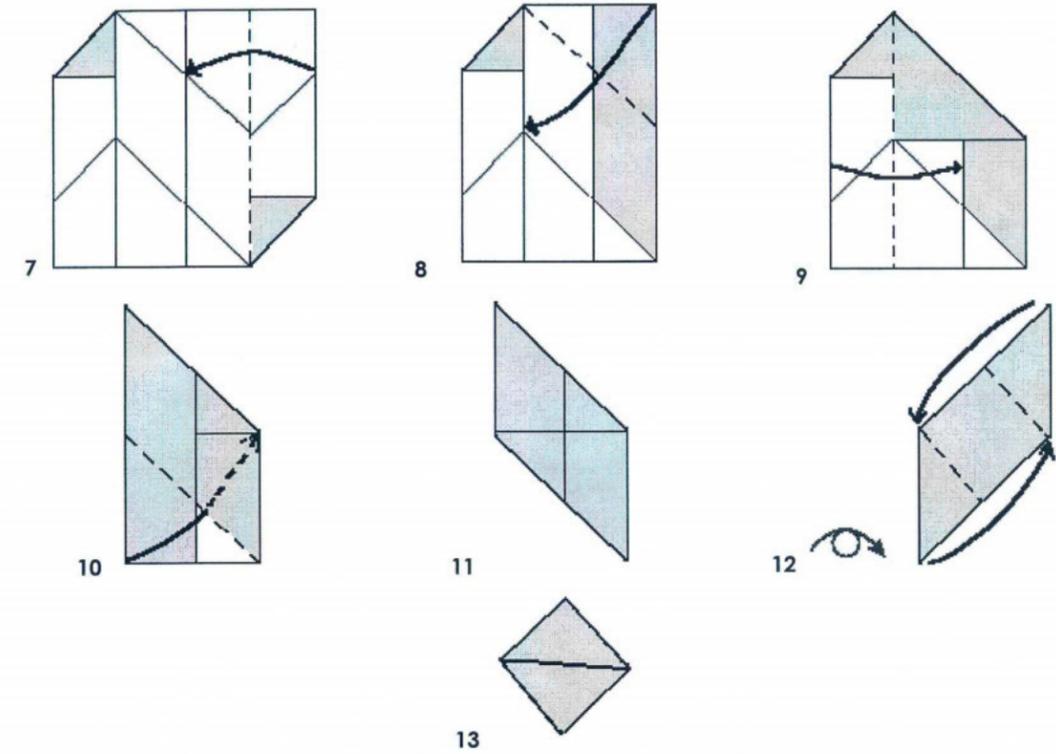
Construyamos el cubo en origami

Para la construcción de este cuerpo debes disponer de un cuadrado en papel por cada cara del cubo. Puedes cortarlos de cualquier tamaño, pero todos exactamente iguales.

¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

Ahora con mucho cuidado y perfección, sigue los siguientes pasos, marcando muy bien cada quiebre para que las aristas de tu cubo queden perfectamente definidas:

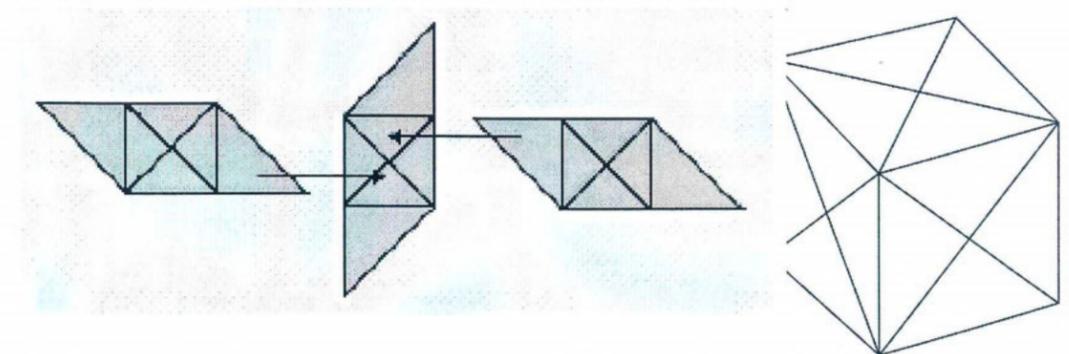




Ahora tienes en la mano tu primer módulo. Haz lo mismo con los otros cinco cuadrados para que a continuación los ensambles y puedas construir tu cubo.

¿Cómo ensamblar los módulos?

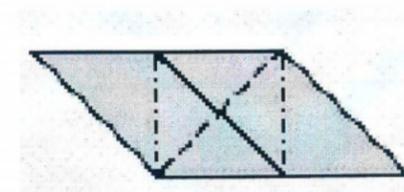
Para ensamblar utiliza los "bolsillos" que les puedes observar a cada módulo; cada uno tiene cuatro de los cuales sólo se utilizarán los dos que están por los lados del cuadrado que no tienen alas. Para hacerlo, guíate con la siguiente gráfica:



Así se debe ver tu cubo:

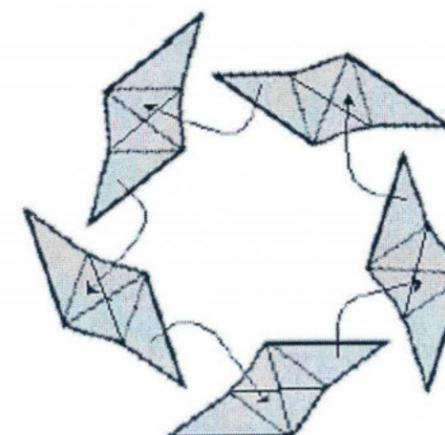
ICOSAEDRO ESTRELLADO

Realiza los siguientes dobleces en el módulo sonobe que aprendiste en la parte anterior:

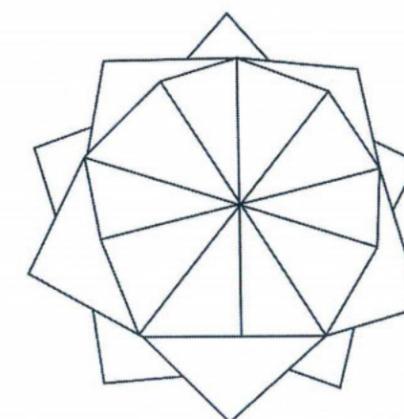


Necesitas 30 de éstos para construir el icosaedro estrellado. A continuación se indica cómo ensamblarlos. Observa que se tienen que ir uniendo cinco módulos para que el cuerpo se cierre correctamente.

Así se ensamblan los módulos



Así se verá tu cuerpo



Elaborado por	Sara María Velásquez y María Isabel Marín. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luheman/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html • http://home.comcast.net/~meenaks/diagrams/sonoassm.pdf

Cubo e icosaedro estrellado en origami. Variación del módulo sonobe

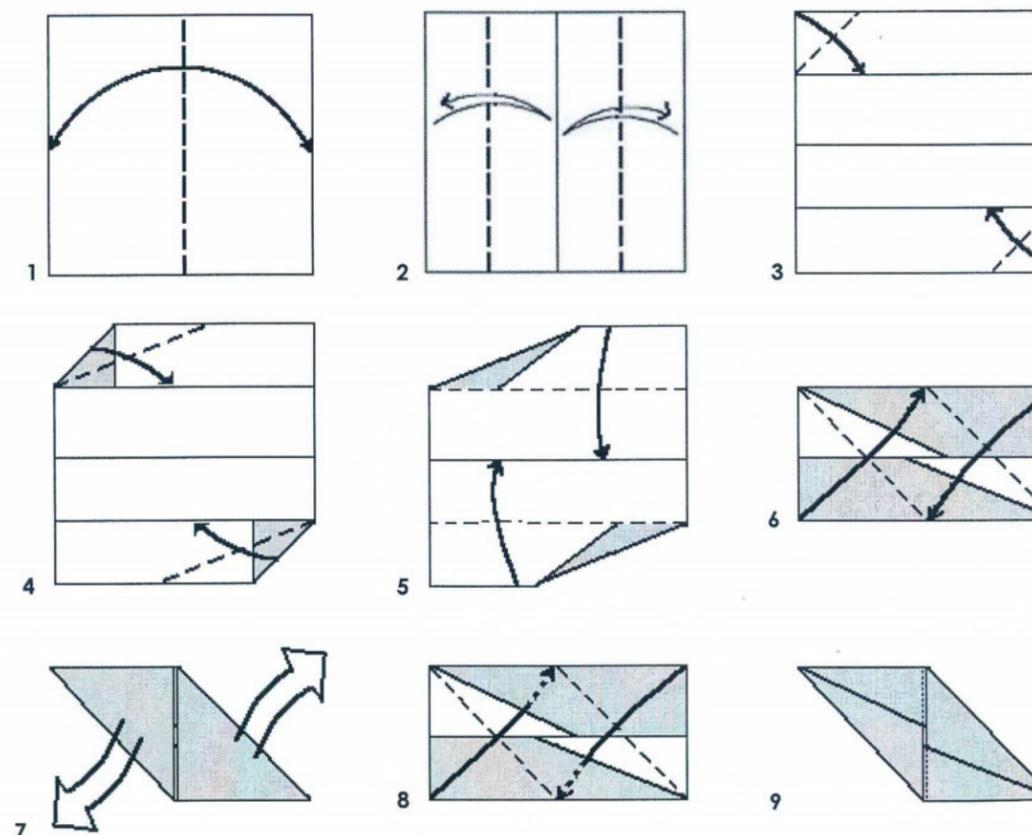


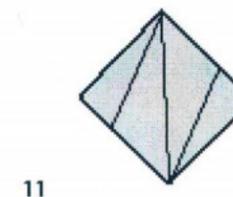
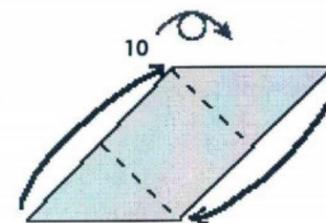
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

A continuación te presentamos una variación del módulo sonobe, con el cual podrás construir un cubo, un octaedro estrellado o un icosaedro estrellado, utilizando 6, 12 ó 30 módulos respectivamente.

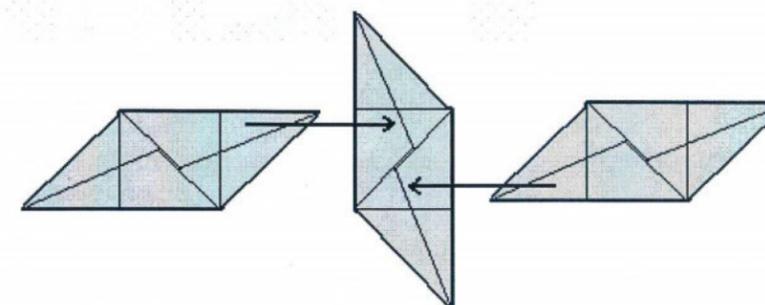
CUBO

Realiza los dobleces que se muestran a continuación:



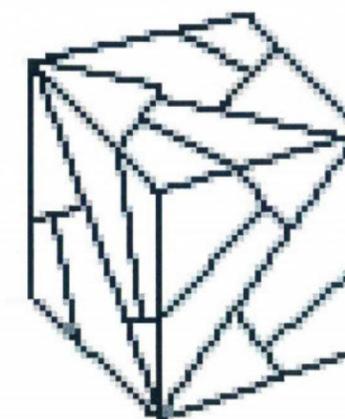


Ensambla los módulos así:



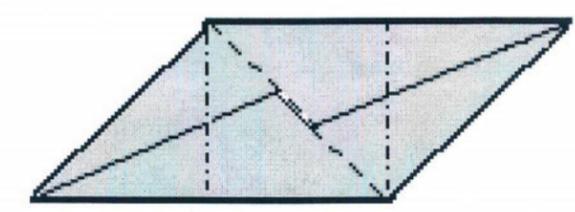
Ten presente que a medida que ensambles los módulos debes buscar la forma del cubo, es decir, no pueden quedar planos como muestra la figura anterior.

Así se debe ver tu cubo:



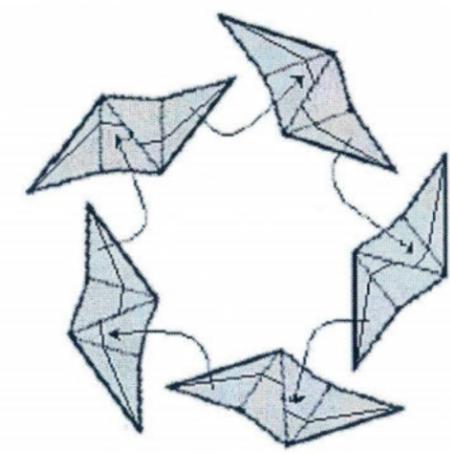
ICOSAEDRO Y OCTAEDRO ESTRELLADOS

Realiza los siguientes dobleces en el módulo que aprendiste a hacer en la parte anterior:

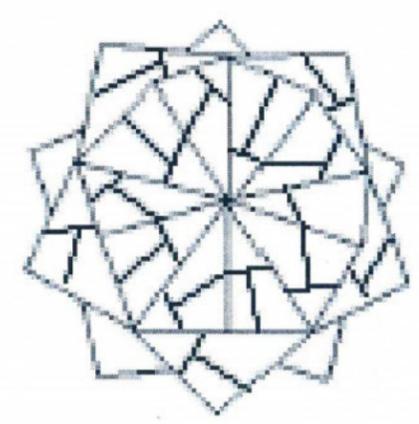


La gráfica que se muestra a continuación te indica cómo ensamblar los módulos para obtener el icosaedro estrellado. Observa que debes ir uniendo cada cinco módulos para que el cuerpo se cierre correctamente. Para construir un octaedro, debes hacer uniones cada cuatro módulos.

Así se ensamblan los módulos



Así se verá tu cuerpo



Elaborado por	Sara María Velásquez L. Abril de 2006.
Referencias	http://geocities.com/jordimastrullenque/sonobe/index.html

Cubo en origami



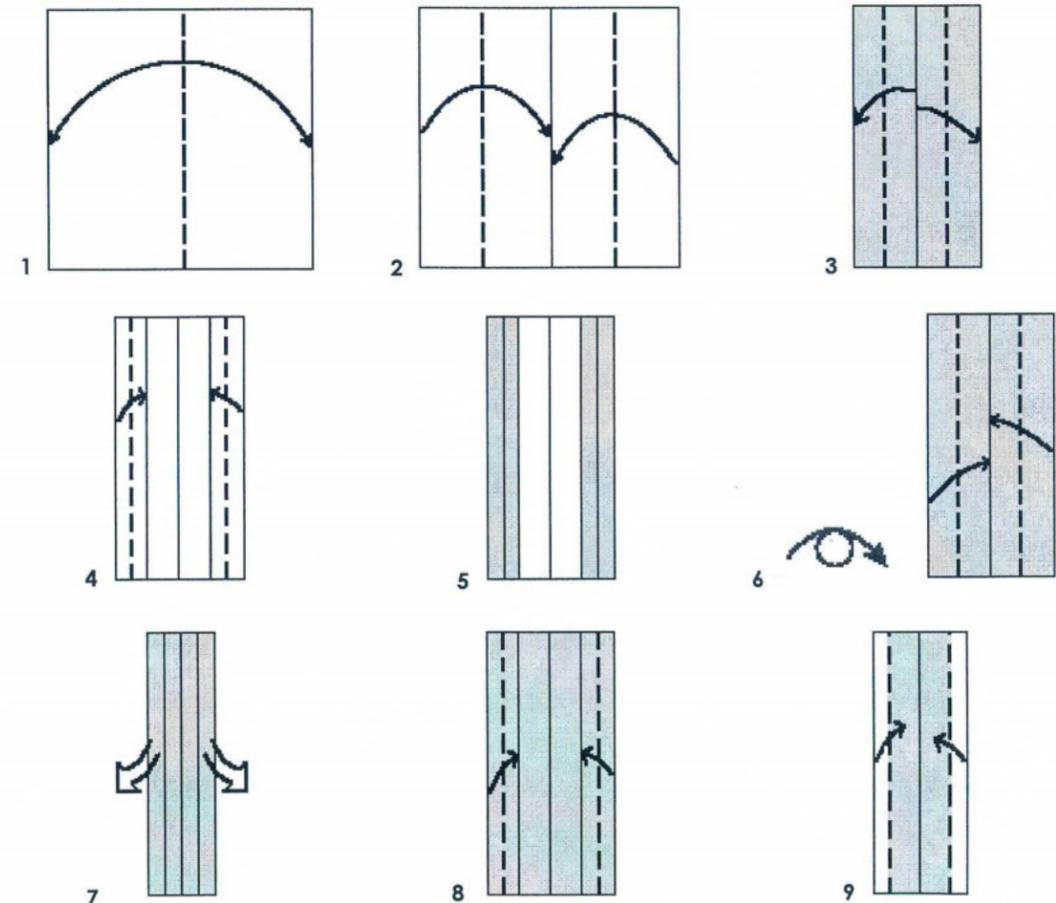
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

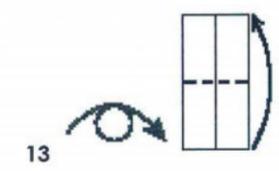
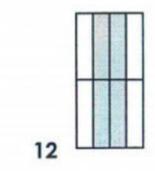
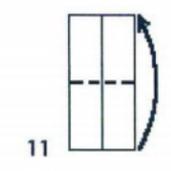
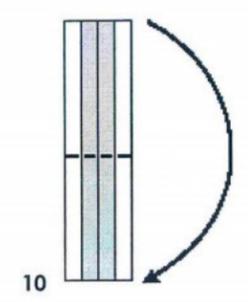
Construyamos el cubo en origami

Para la construcción de este cuerpo debes disponer de un cuadrado en papel por cada cara del cubo. Puedes cortarlos de cualquier tamaño, pero todos exactamente iguales.

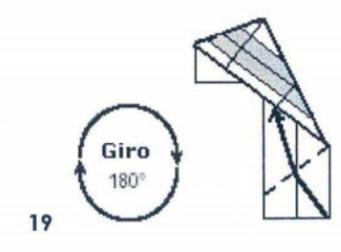
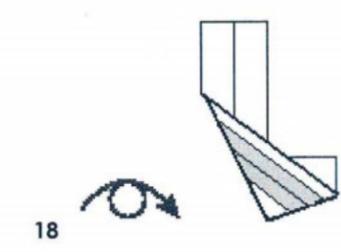
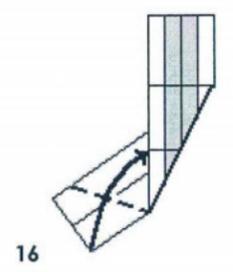
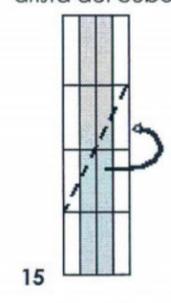
¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

Guíate por los pasos que se muestran a continuación y ten presente hacer cada doblez lo mejor que puedas para que el cubo quede bien definido:

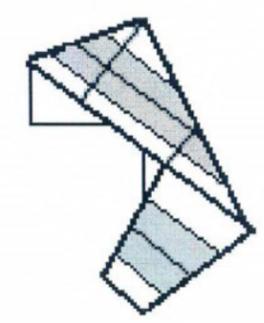




Este doblado corresponde a la arista del cubo



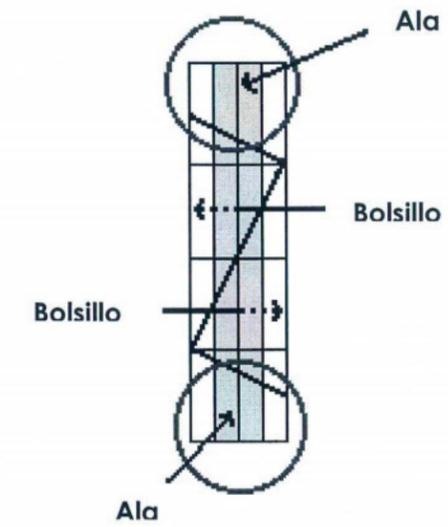
Así quedará tu módulo



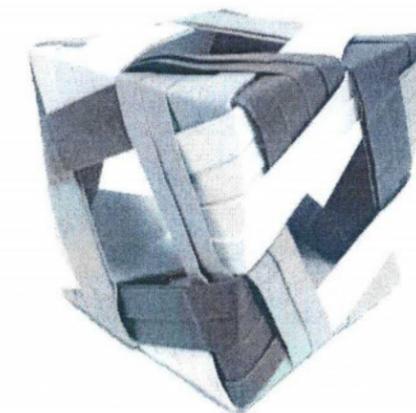
Ahora ya tienes en la mano tu primer módulo. Construye otros 11 iguales a éste.

¿Cómo ensamblar los módulos?

El cubo tiene ocho vértices, en cada uno de los cuales deben ensamblarse tres módulos introduciendo cada una de las "alas" en los bolsillos que quedaron formados en la mitad del otro módulo, así:



Al final tu cubo quedará así:



Elaborado por	María Isabel Marín y Sara María Velásquez L. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html

Cubo truncado en origami



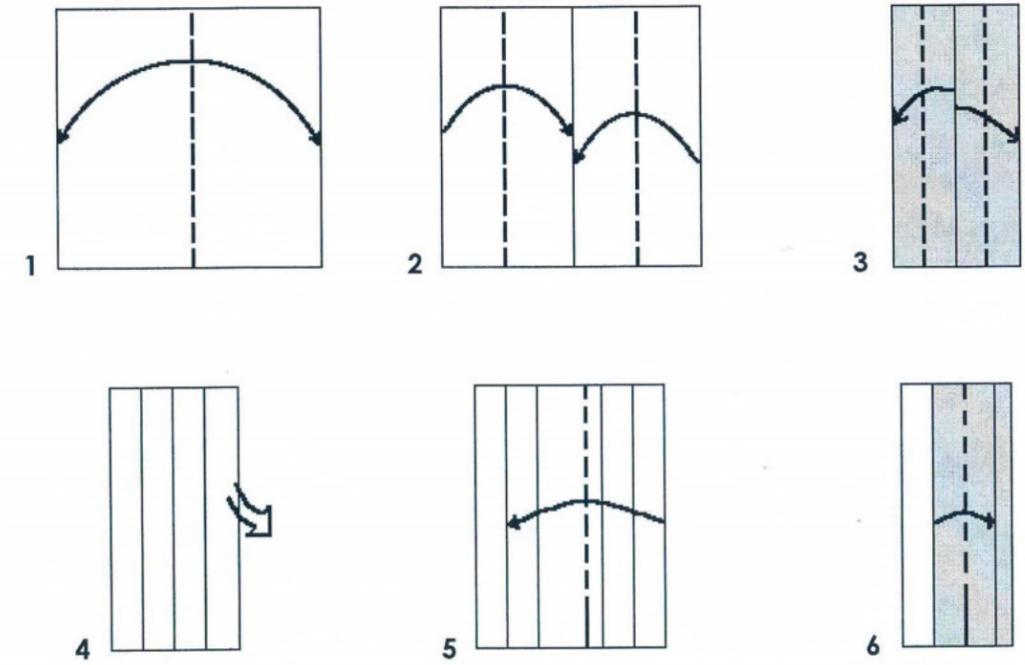
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el cubo truncado en origami

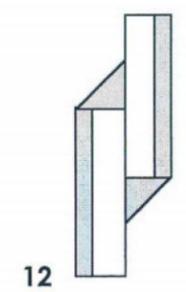
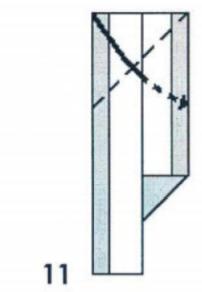
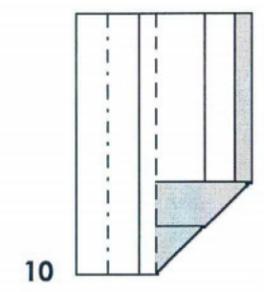
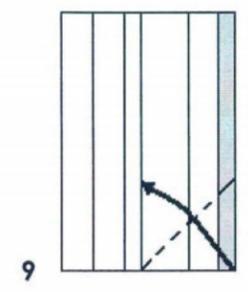
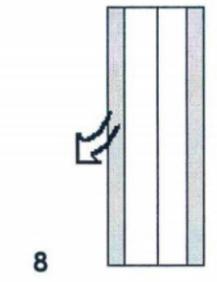
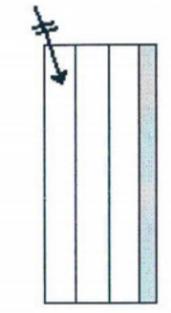
Para la construcción de este cuerpo debes disponer de un cuadrado en papel por cada cara del cubo. Puedes cortarlos de cualquier tamaño, pero todos exactamente iguales.

¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

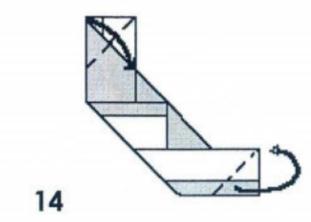
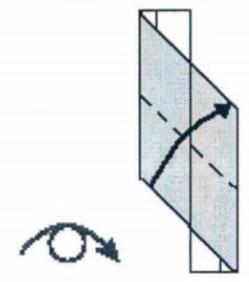
Guíate por los pasos que se muestran a continuación y ten presente hacer cada doblez lo mejor que puedas para que el cubo quede bien definido:



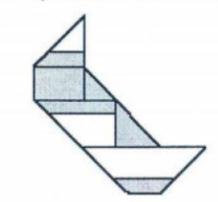
7 Repite en el lado izquierdo del paso 4 al 6



13 Este doblez corresponde a la arista del cubo



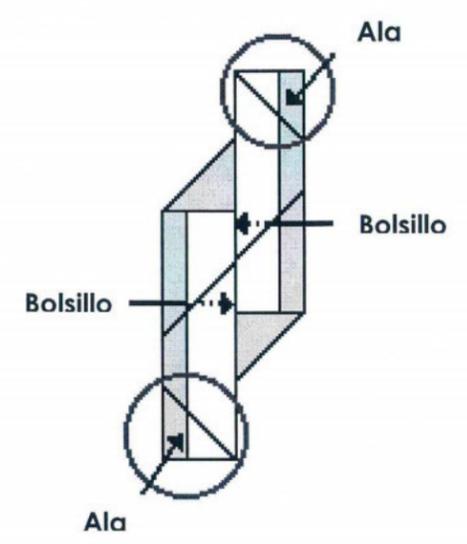
Así quedará tu módulo



Ahora ya tienes en la mano tu primer módulo. Construye con otros 11 iguales a éste.

¿Cómo ensamblar los módulos?

El cubo tiene ocho vértices, en cada uno de los cuales quedará un espacio vacío con forma de triángulo; por esta razón se dice que el cubo es truncado, sin vértices. La gráfica que te muestra a continuación muestra las alas y los bolsillos del módulo:

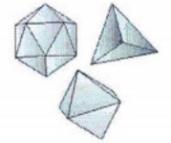


Al final tu cubo deberá verse como este:



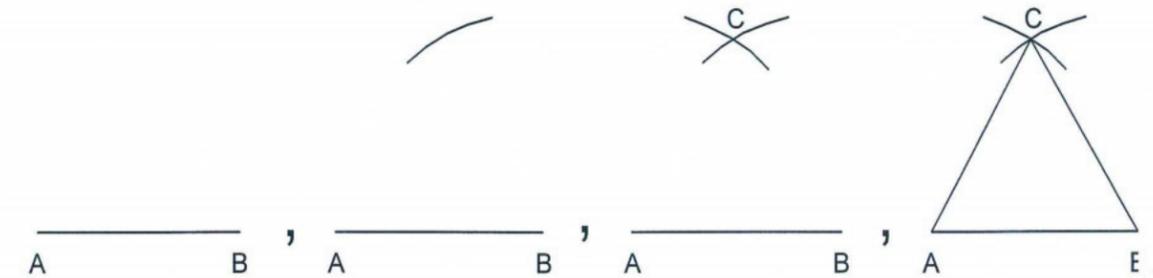
Elaborado por Sara María Velásquez L. Mayo de 2006.

Construcción del tetraedro, octaedro e icosaedro en cartulina

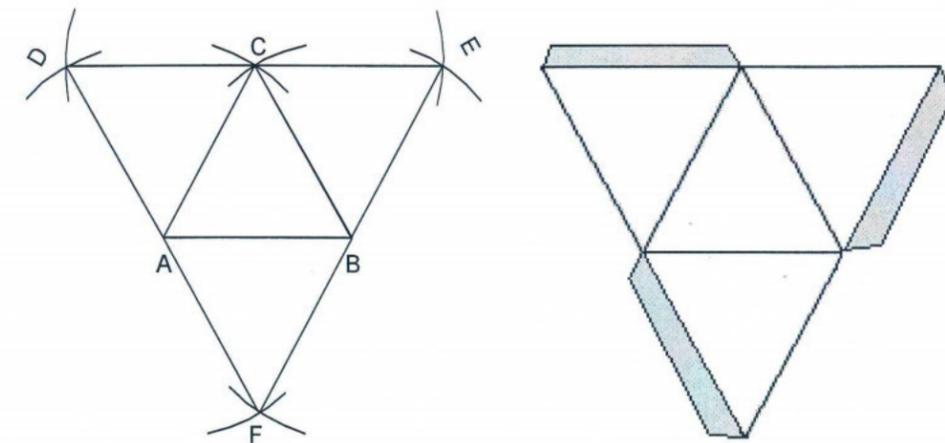


Proyecto	Matemáticas Y Física Básicas en Antioquia
Materiales	Papel, cartulina, pegante, regla, tijeras y compás de precisión

ACTIVIDAD 1: ¿Cómo construir un triángulo equilátero? Observa y analiza la siguiente secuencia que fue hecha con regla y compás.

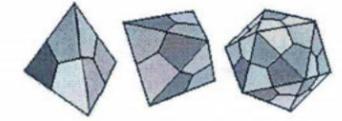


ACTIVIDAD 2: Ya sabes construir un triángulo equilátero del tamaño que quieras. Vamos a construir una pirámide triangular. Observa los triángulos en el siguiente modelo, ¿cómo son sus lados?, ¿son todos iguales?, ¿cuántos triángulos hay?



El procedimiento que acabas de descubrir, repítelo sobre cartulina, empleando triángulos equiláteros de 5 cm de lado. El gráfico que aparece en la parte derecha es una de las formas de dibujar las pestañas.

Tetraedro, octaedro e icosaedro en origami. Módulo triangular de arista

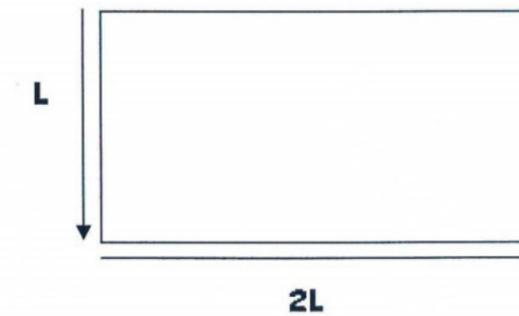


Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el tetraedro en origami

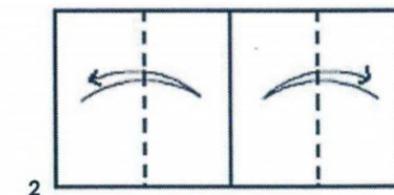
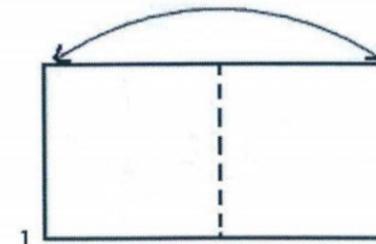
El módulo que utilizaremos fue desarrollado por Lewis Simon y Bennett Arnstein, y es llamado módulo triangular de arista (Gurkewitz y Arnstein, 1995:53).

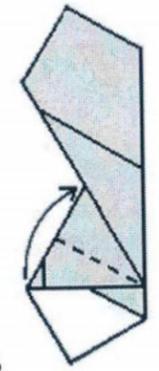
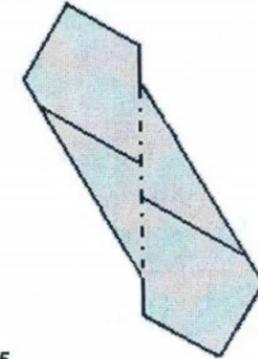
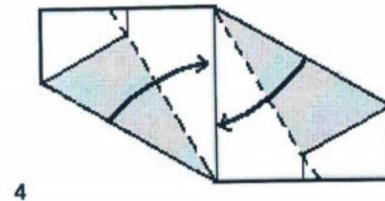
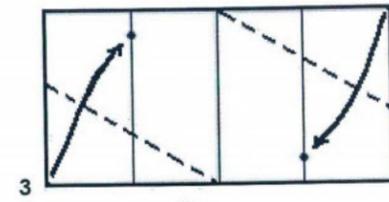
Para la construcción de este poliedro debes disponer de un rectángulo por cada arista; sus dimensiones deben corresponder con las mostradas a continuación.



¿Cuántos rectángulos necesitas? _____.

Ahora con mucho cuidado sigue los siguientes pasos, marcando muy bien cada quiebre para que las aristas de tu tetraedro queden perfectamente definidas:



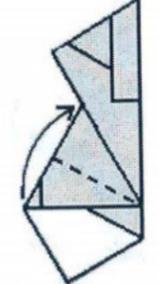
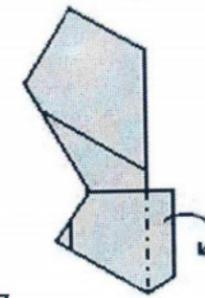


4

5

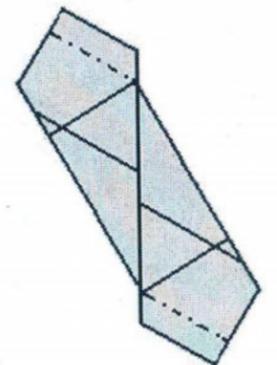
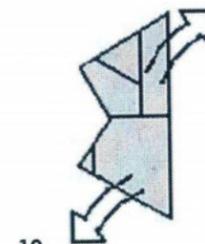
6

9 Repetir los pasos del 6 al 8



7

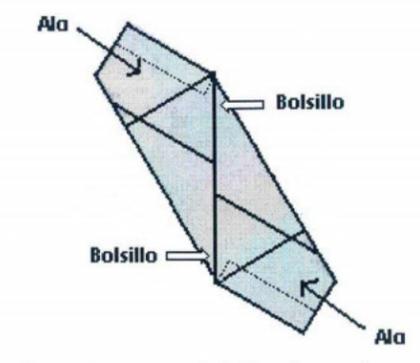
8



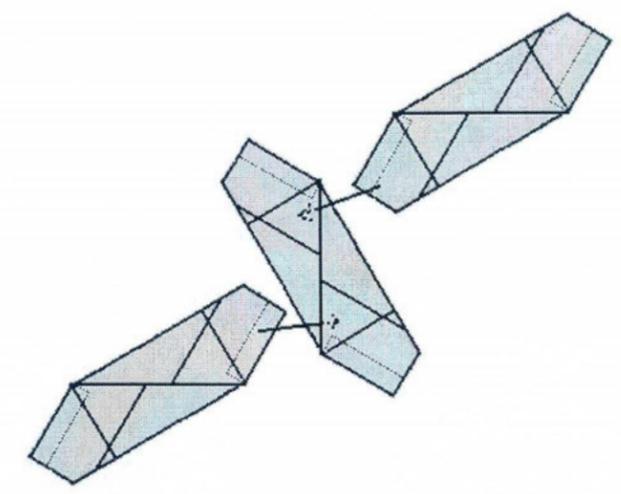
10

11

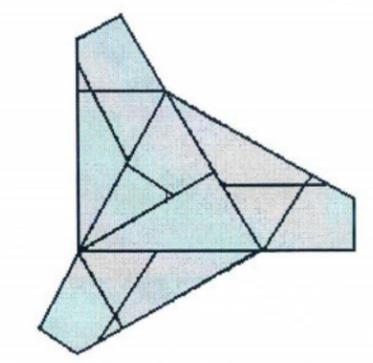
12



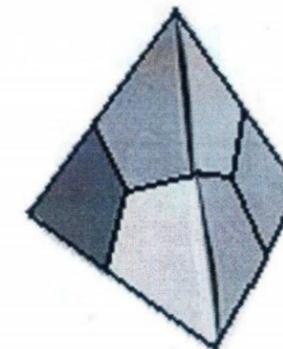
Ya tienes en tus manos tu primer módulo, has lo mismo con los otros cinco rectángulos para que los ensambles y puedas obtener tu tetraedro. Cada módulo posee dos alas y un bolsillo largo en el que entran las alas de otros dos módulos, uno en una dirección y el otro en la dirección contraria como lo indican las flechas a continuación:



Para mayor facilidad al ensamblar, debes primero formar una cara que deberá verse como esta:



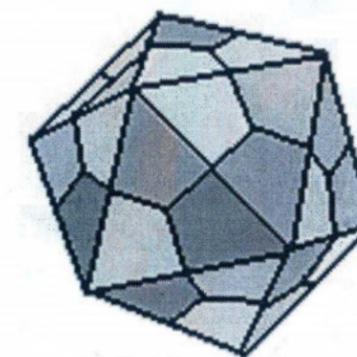
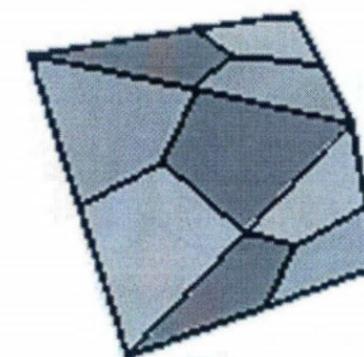
Al final el tetraedro deberá verse así:



OCTAEDRO E ICOSAEDRO

Utilizando el módulo anterior podrás construir un Tetraedro y un icosaedro. Para ello necesitarás de un módulo por cada arista en cada caso, entonces, ¿cuántos módulos necesitas para hacer el Octaedro?: _____, y ¿cuántos para el Icosaedro?: _____.

Ten en cuenta que para formar un vértice del octaedro debes ensamblar cuatro módulos y para formar un vértice del Icosaedro, cinco. Los cuerpos deberán verse como estos:



Elaborado por	Sara María Velásquez y María Isabel Marín. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html • http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2003/agosto/nosotros87.htm

Octaedro en origami. Módulo zeta



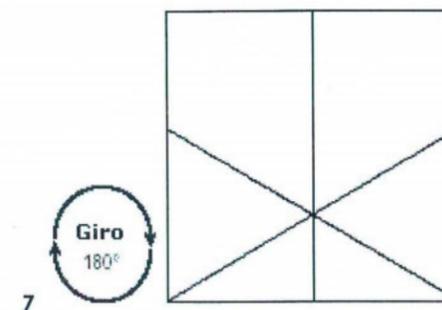
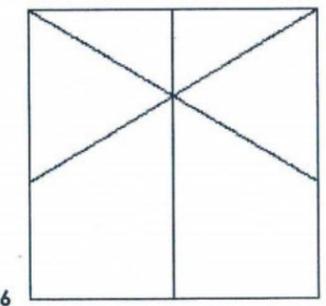
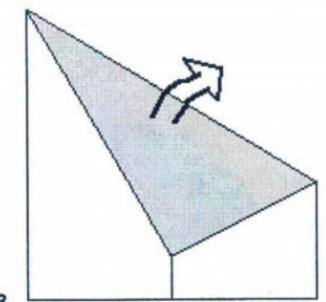
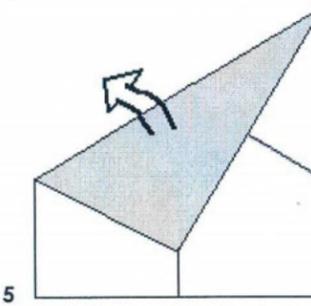
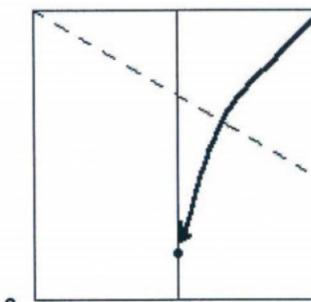
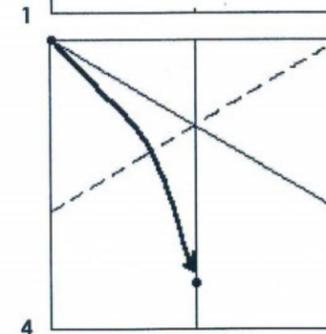
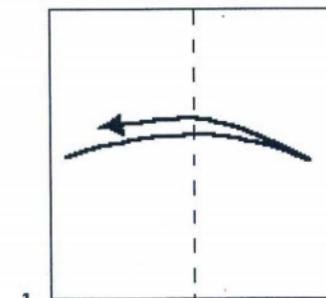
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el octaedro en origami

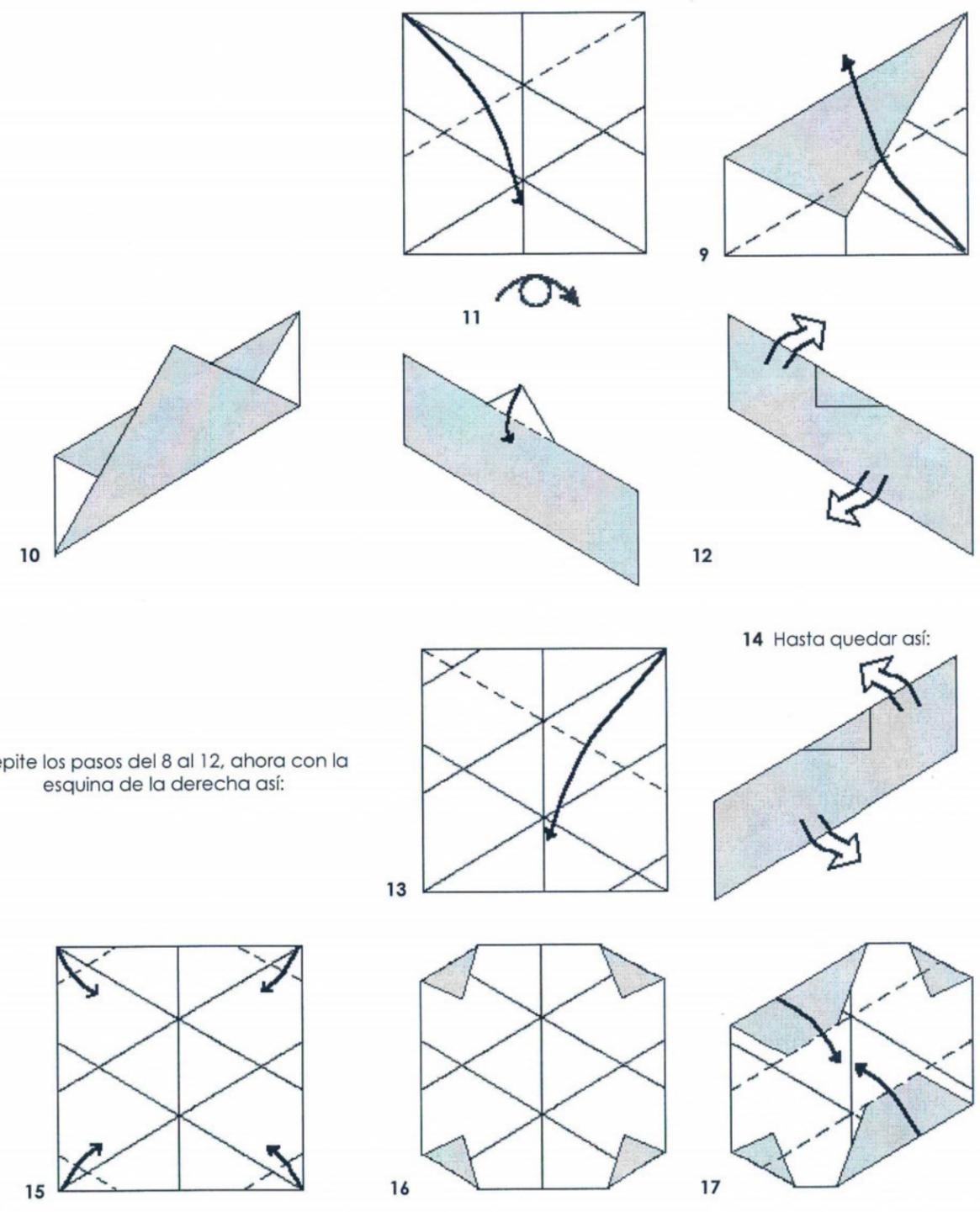
Para la construcción de este poliedro debes disponer de un cuadrado por cada tres aristas del octaedro.

¿Cuántas aristas tiene el octaedro? _____
 ¿Cuántos cuadrados se necesitan? _____

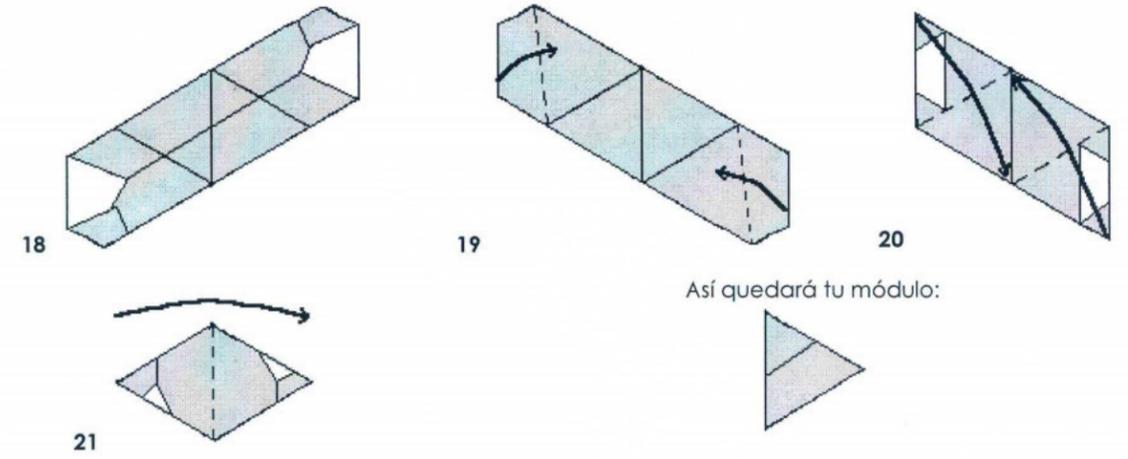
Construcción del módulo:



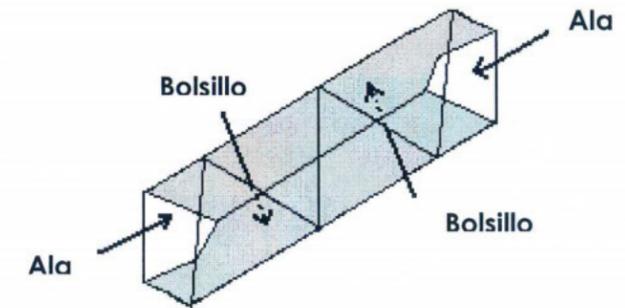
8 Repite los pasos del 3 al 6 y luego:



Repite los pasos del 8 al 12, ahora con la esquina de la derecha así:

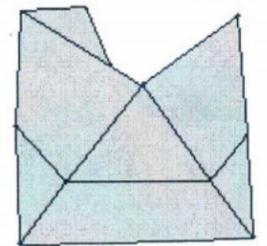


Ahora identifica cuáles son las alas y cuáles son los bolsillos:

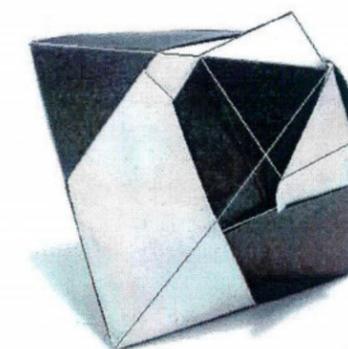


¿Cómo ensamblar los módulos?

Primero dispón todos tus módulos de manera que se visualice el "esqueleto" del cuerpo así:

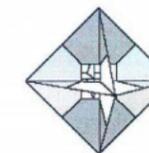


Introduce el primer doblez de uno de tus módulos dentro del bolsillo que queda en el segundo doblez del otro módulo, de tal forma que tu cuerpo vaya tomando forma. Al final tu cuerpo deberá verse como éste:



Elaborado por	María Isabel Marín y Sara María Velásquez. Mayo de 2006.
Referencias	http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luherman/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html

Octaedro en origami. Módulo giroscopio

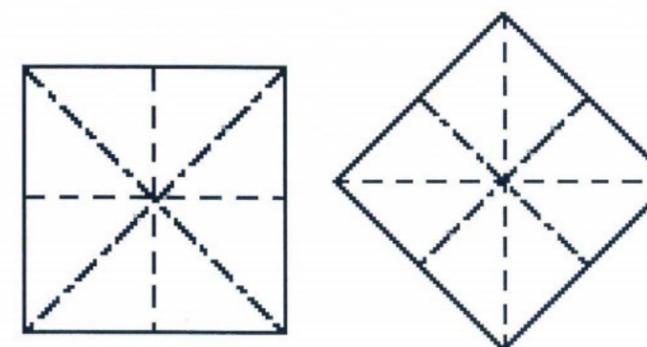


Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

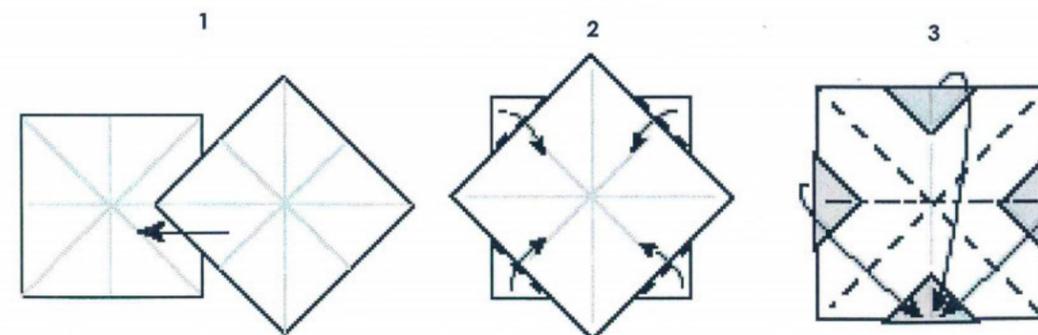
Construyamos el octaedro en origami

Para la construcción de este poliedro debes disponer de dos cuadrados por cada vértice. ¿Cuántos vértices tiene el octaedro? _____, ¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

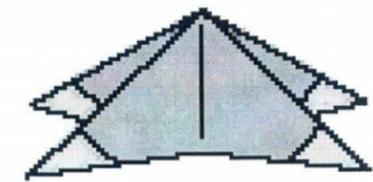
Ahora con mucho cuidado sigue los pasos, marcando muy bien cada quiebre para que las aristas de tu octaedro queden perfectamente definidas. Toma pares de cuadrados y dobla cada uno así:



Para formar el módulo debes poner uno sobre otro, tal como se muestra a continuación:

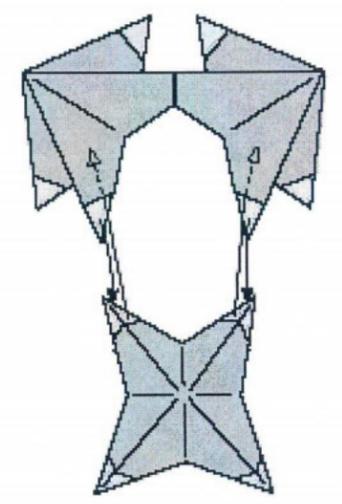
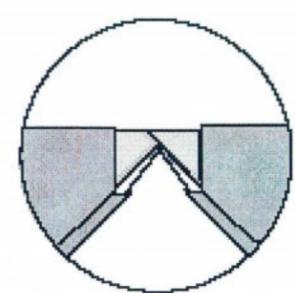
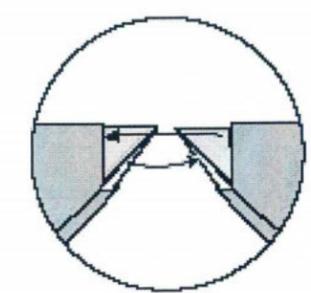


Así se verá tu módulo:

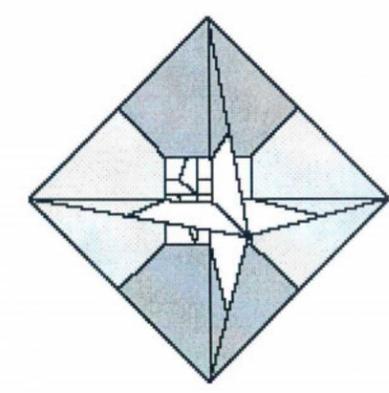


¿Cómo ensamblar los módulos?

Guíate por las siguientes gráficas:



El octaedro quedará así:



Elaborador por	Sara María Velásquez y María Isabel Marín. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none">• http://www.fabricorigami.com/misc/pdf/files/misc55.pdf• http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luheman/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html

Construcción del dodecaedro regular en cartulina

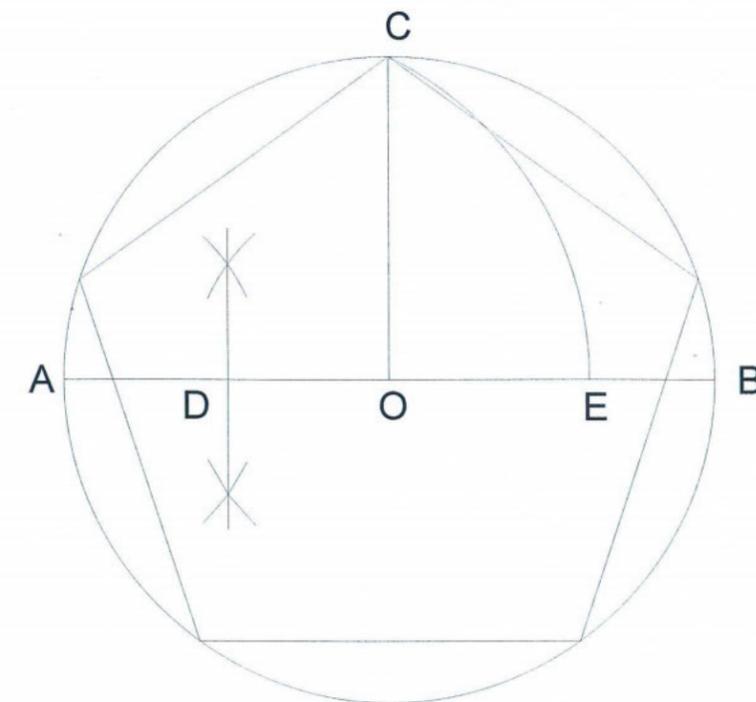


Proyecto	Matemáticas Y Física Básicas en Antioquia
Materiales	Papel, cartulina, pegante, regla, tijeras y compás de precisión

Antes de enseñarte a construir la plantilla de un dodecaedro regular, te indicaremos cómo construir un pentágono regular con regla y compás.

CONSTRUCCIÓN DEL PENTÁGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

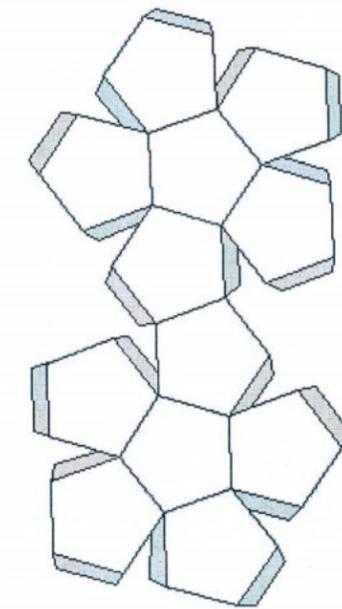
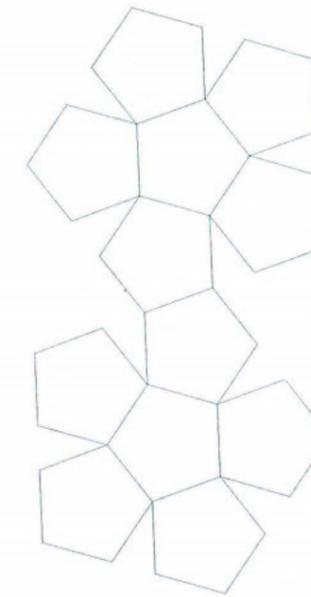
1. Traza una circunferencia, de radio arbitrario, con centro en O.
2. Traza un diámetro cualquiera AB.
3. Construye un radio OC, perpendicular a AB.
4. Halla el punto medio del radio OA, y llámalo D.
5. Haz centro en D, abre el compás hasta C, y traza un arco que corte el radio OB en el punto E.
6. Los lados del pentágono tendrán por longitud EC.
7. Traslada el segmento EC en la circunferencia hasta formar el pentágono, uniendo los puntos que acabas de marcar.



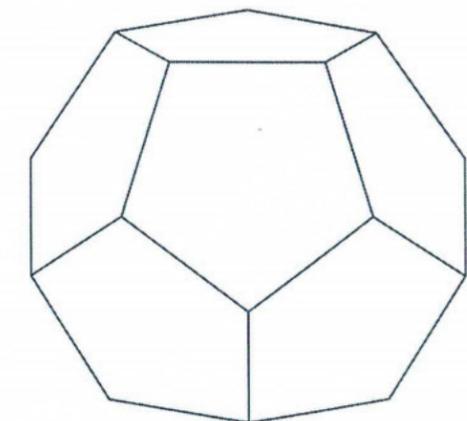
CONSTRUCCIÓN DEL DODECAEDRO REGULAR EN CARTULINA EMPLEANDO REGLA Y COMPÁS

Observa la siguiente gráfica y descubre la estrategia que se empleó para la construcción de este modelo; te puede ser muy útil.

El primer dibujo corresponde a la plantilla del dodecaedro sin pestañas y el segundo presenta la misma plantilla con una posible forma de ubicárselas.



Recórtalo y pégalo para que te quede como éste:



Elaborado por: Carlos Julio Echavarría y Víctor Hugo Valencia. Julio de 2000.

Dodecaedro en origami. Módulo phizz



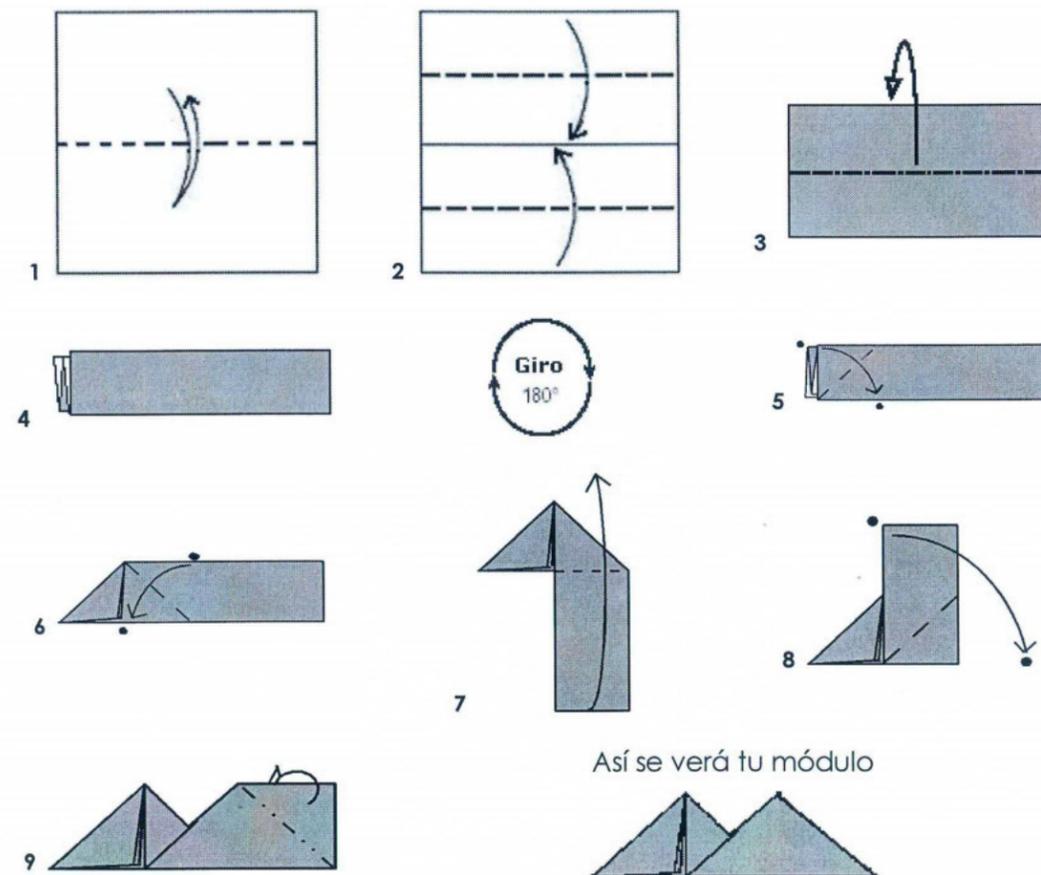
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el dodecaedro en origami

Para la construcción de este cuerpo debes disponer de un cuadrado en papel por cada arista del dodecaedro. Puedes cortarlos de cualquier tamaño, pero todos exactamente iguales.

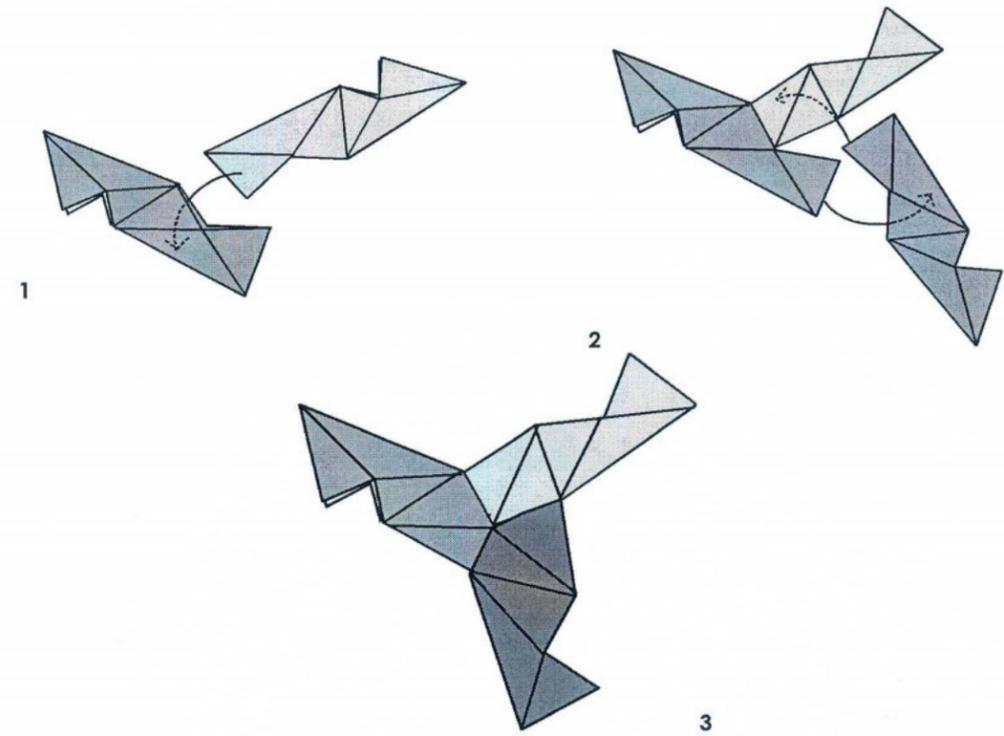
¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

Sigue los pasos que se muestran a continuación para formar un módulo:

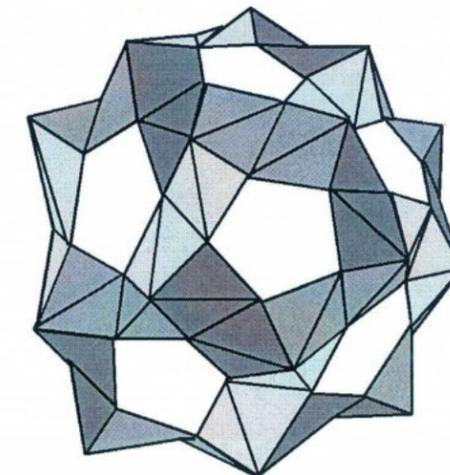


¿Cómo ensamblar los módulos?

Guíate por las siguientes gráficas y recuerda que cada una de las caras del dodecaedro es un pentágono regular:



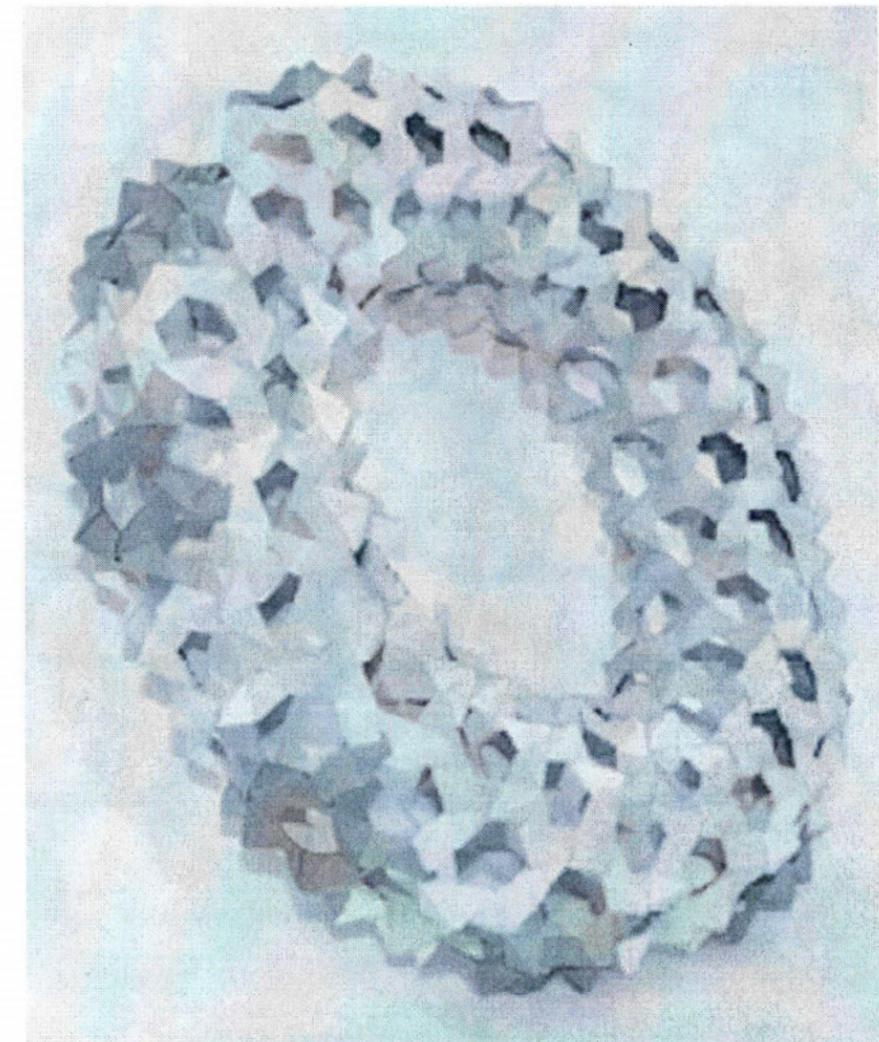
Así quedará tu cuerpo



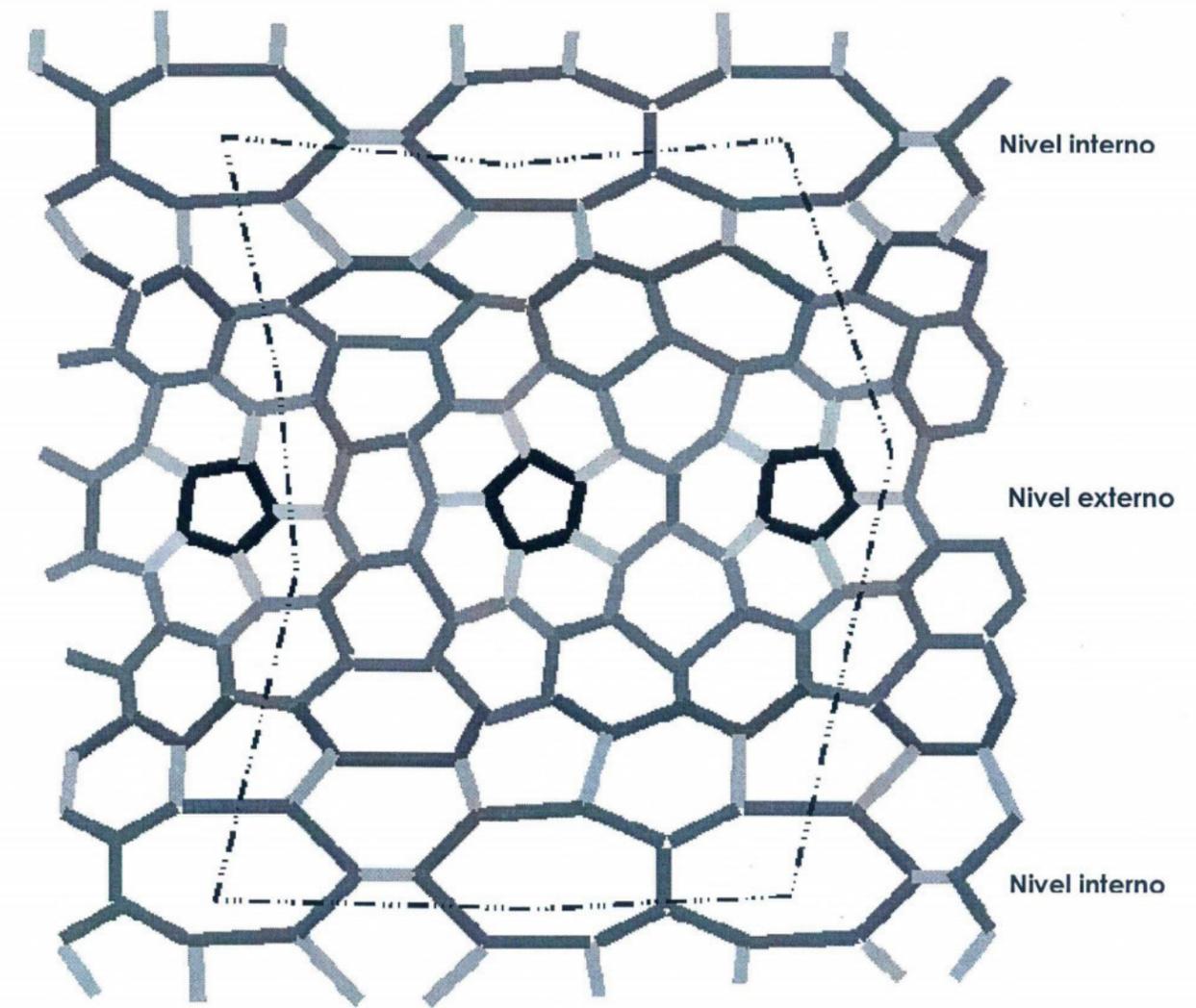
TORO MODULAR

El toro que se muestra en la gráfica fue diseñado por el italiano Roberto Gretter. Utilizando 555 módulos phizz podrás construirlo. Toro es el nombre matemático por el que se conoce a la superficie que se asemeja a un flotador salvavidas o a una dona. Viene del griego *τοπήω*, que significa agujero, perforar.

El toro está formado a partir de pentágonos, hexágonos y heptágonos, usando una pieza por cada arista.



Los 10 pentágonos de la parte exterior le dan una curvatura positiva, mientras que los 10 heptágonos de la parte interior proporcionan la curvatura negativa necesaria, así:



← Esta sección debe repetirse 5 veces →

Elaborado por	Juan Santiago Londoño y Hugo Alejandro Herrera. Febrero de 2001.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • www.paperfolding.com/math • http://www.merimack.edu/~thull/phzig/phzig.html • http://www.ehu.es/xet/logotipo.html • http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/01-02/PG01-02-royo.pdf • http://ditelo.itc.it/people/gretter/origami.html
Modificado por	Sara María Velásquez L. Mayo de 2006.

Dodecaedro en origami



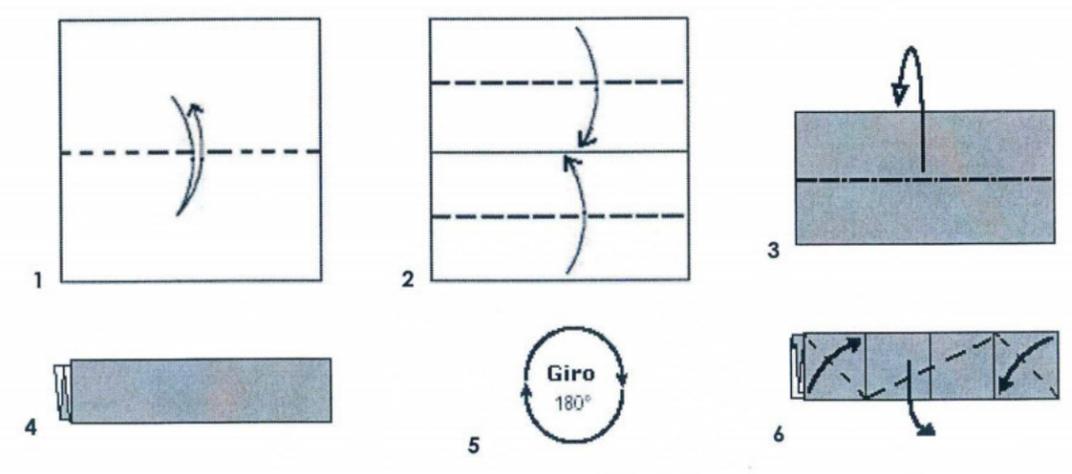
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el dodecaedro en origami

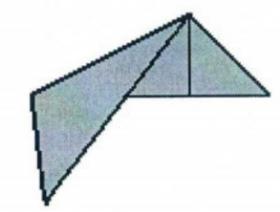
Para la construcción de este cuerpo debes disponer de un cuadrado en papel por cada arista del Dodecaedro, puedes cortarlos de cualquier tamaño, pero todos exactamente iguales.

¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

Guíate por los pasos que se muestran a continuación:



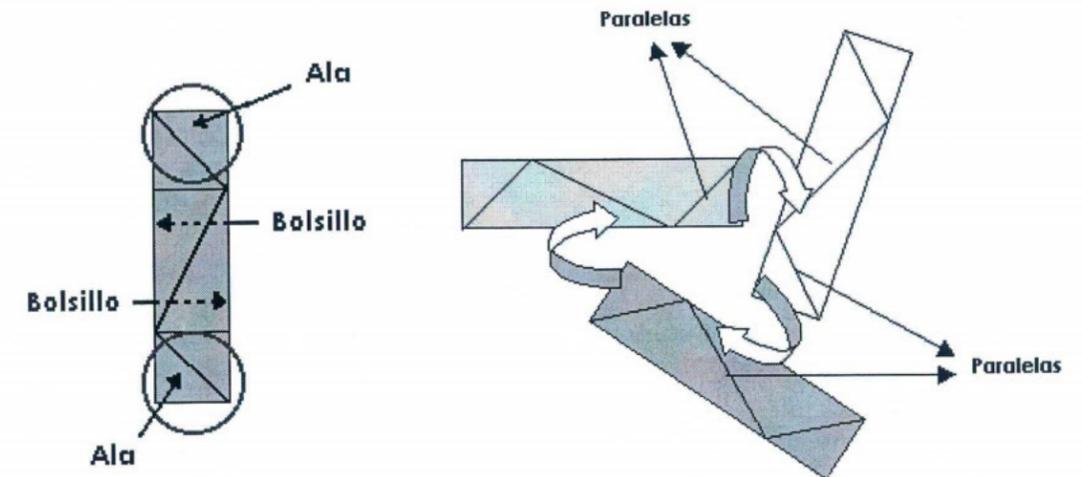
Así quedará tu módulo



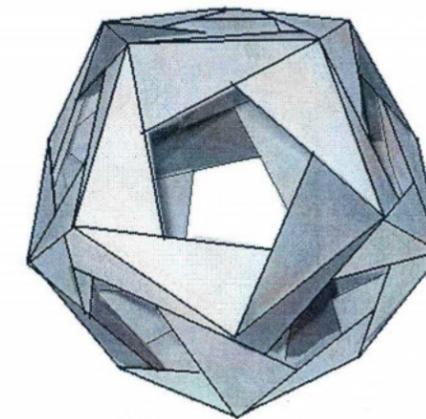
Ahora ya tienes en las manos tu primer módulo. Construye otros 29 iguales a éste.

¿Cómo ensamblar los módulos?

El dodecaedro tiene 20 vértices, en cada uno de ellos deben ensamblarse tres módulos introduciendo las "alas" en los bolsillos de los otros módulos, así:

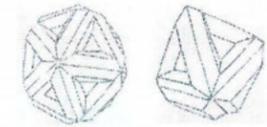


Al final tu dodecaedro quedará así:



Elaborado por	Sara María Velásquez L. Junio de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • Guía dodecaedro. Elaborada por Robinson Ramírez, Elizabeth Montoya, José David Restrepo y Jaime Piedrahita, integrantes del Grupo Ábaco de la Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. • www.paperfolding.com/math

Icosaedro y octaedro en origami



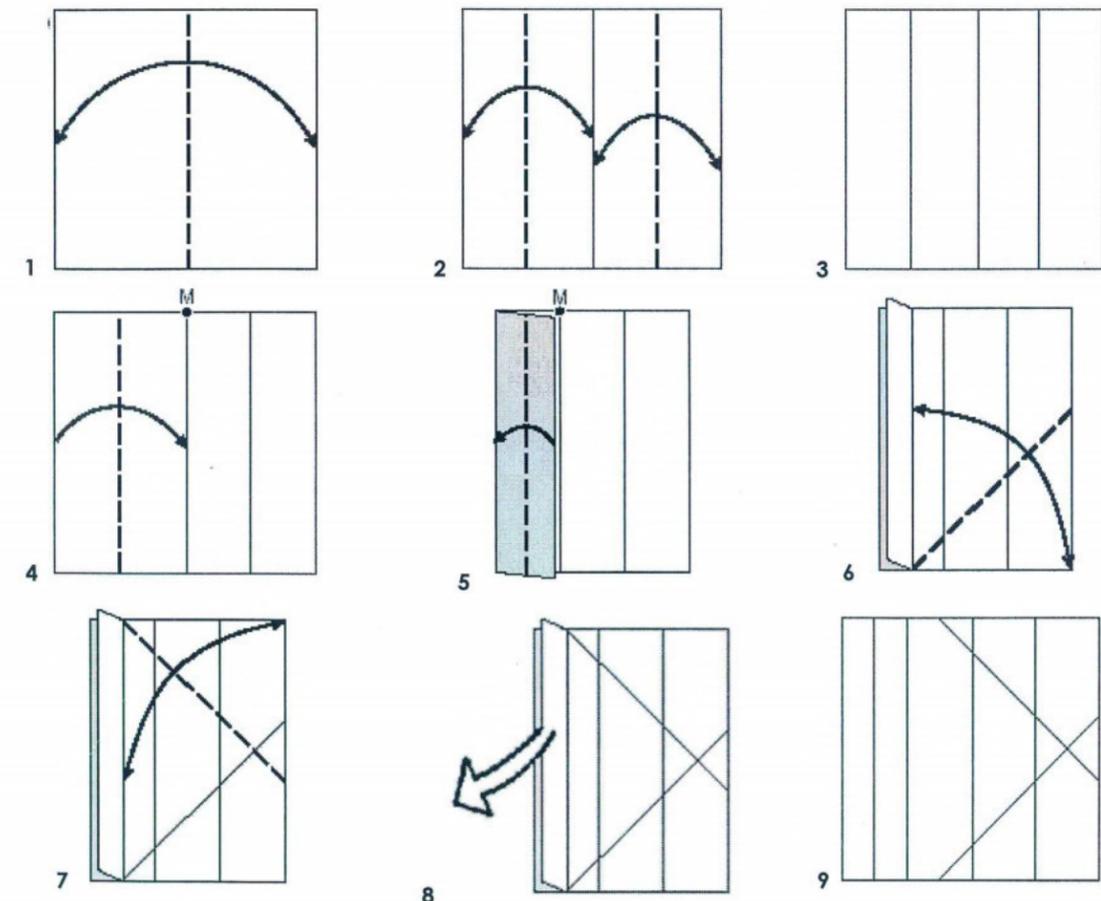
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el icosaedro en origami

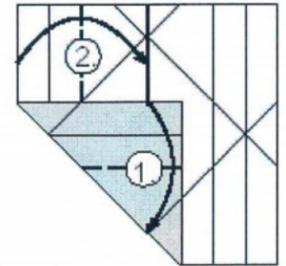
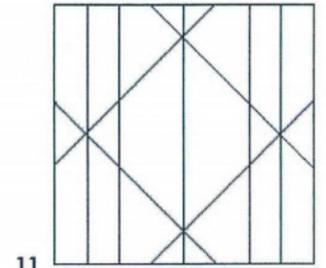
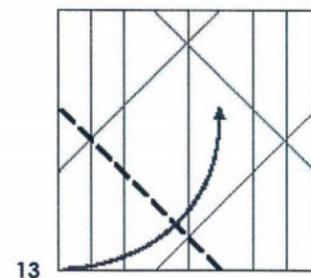
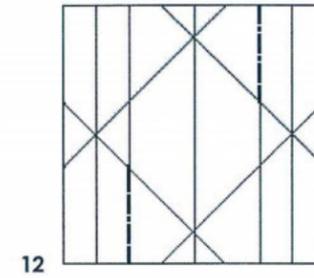
Para la construcción de este cuerpo debes disponer de un cuadrado de papel por cada arista del icosaedro, puedes cortarlos de cualquier tamaño, pero todos exactamente iguales.

¿Cuántos cuadrados necesitas? _____.

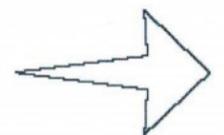
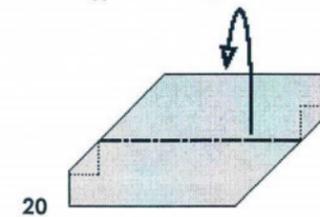
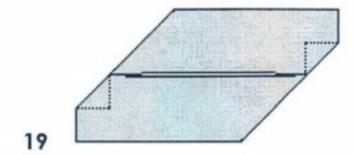
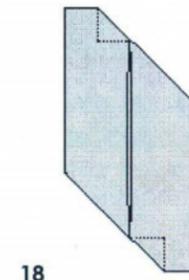
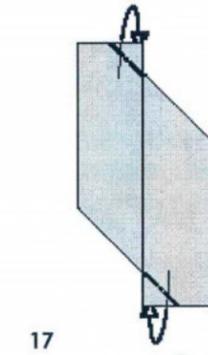
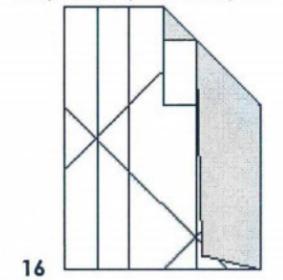
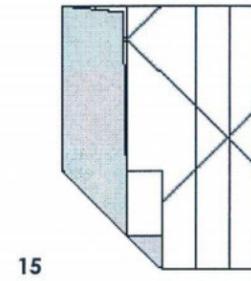
Ahora con mucho cuidado y perfección, sigue los siguientes pasos, marcando muy bien cada quiebre para que tu icosaedro quede perfectamente definido:

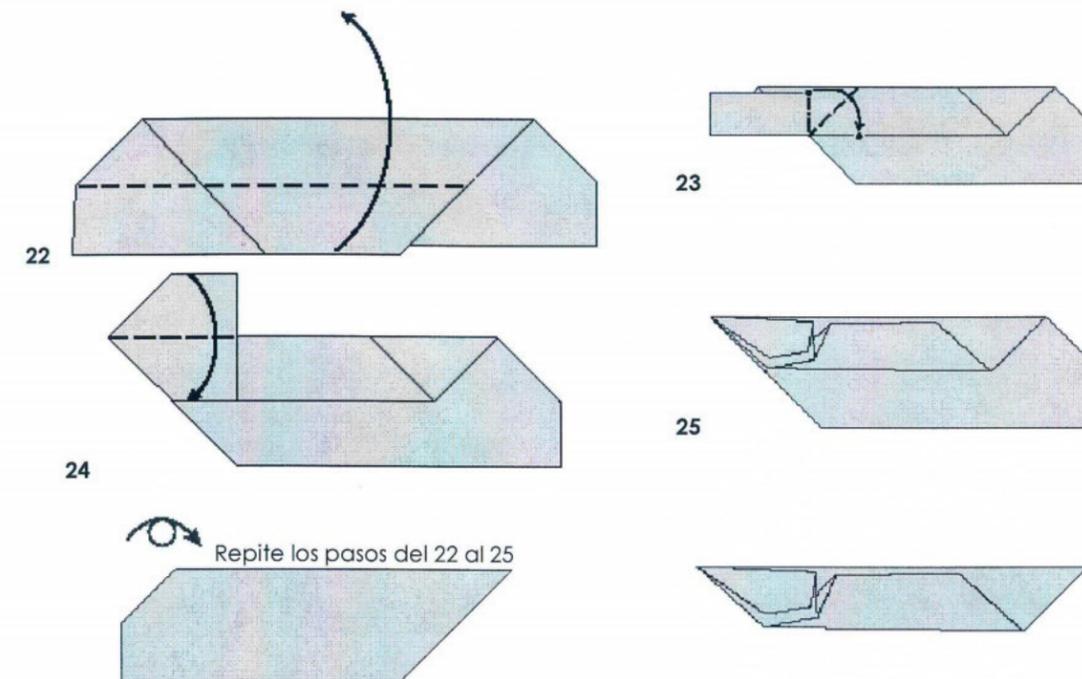


Repita los pasos del 4 al 8

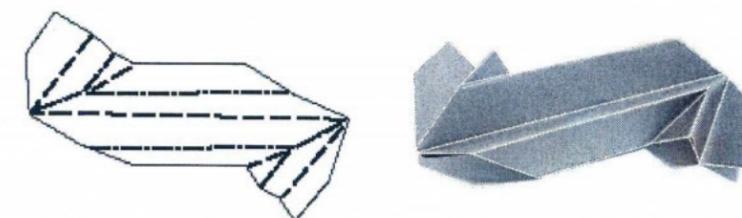


Repita los pasos 13 y 14



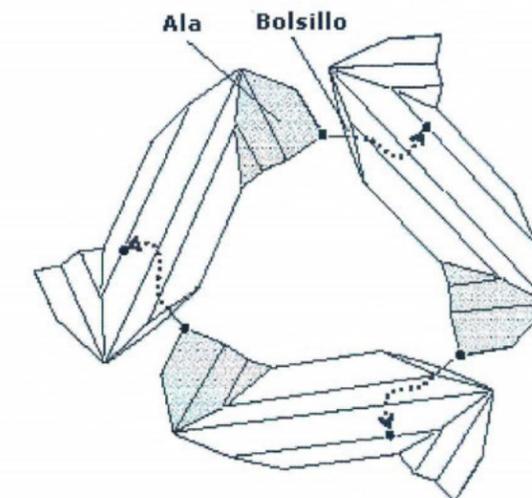


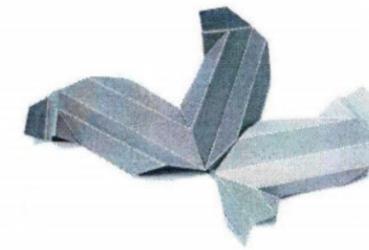
Así se verá tu módulo. Haz lo mismo con los otros 29 cuadrados para que ensambles tu cuerpo.



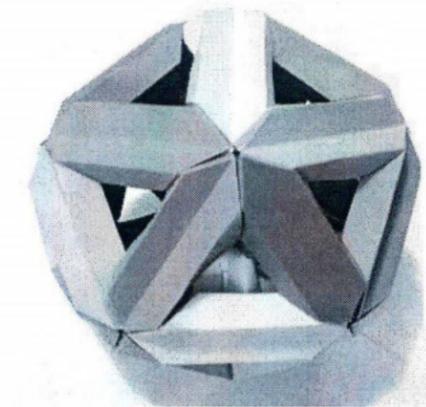
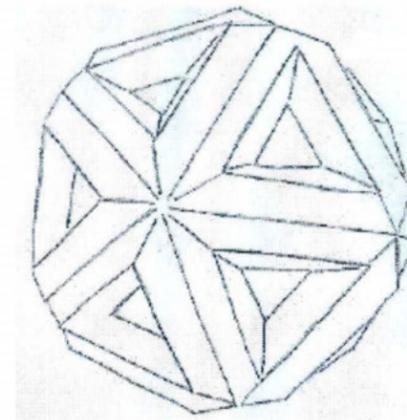
Como podrás observar, cada módulo posee dos alas, una en cada extremo, y a la vez, una especie de bolsillo a un lado de cada ala. De ellos te vas a valer para ensamblar tus módulos como te lo muestra la siguiente imagen:

Cada vértice se forma con la unión de cinco módulos. Cuando pongas el quinto módulo te darás cuenta de que el vértice se cierra si insertas el ala del último módulo que pusiste en uno de los bolsillos del primero, así:



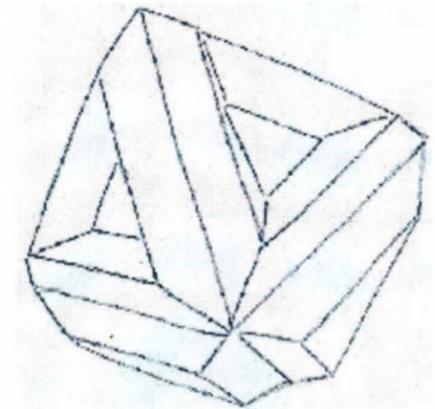


Y por último tu icosaedro se deberá ver así:



CONSTRUCCIÓN DEL OCTAEDRO

Utilizando 12 módulos con los hechos para el icosaedro (cada uno representa una arista al igual que en el icosaedro), podrás construir un octaedro. Debes tener en cuenta que en cada vértice del poliedro se unen cuatro módulos. Al final deberá verse como éste:



Elaborado por	María Isabel Marín y Sara María Velásquez. Abril de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html • http://www.origamiseiten.de/diagrams/kmodul02.pdf

II. Poliedros regulares

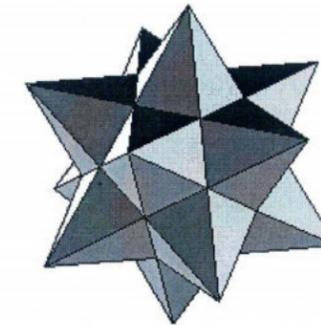
no convexos



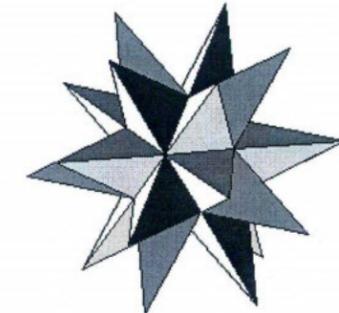
Poliedros regulares no convexos

Como hemos visto existen sólo cinco poliedros regulares convexos (que se asemeja al exterior de una circunferencia o de una esfera). Si eliminamos la condición de ser convexo, encontraremos cuatro más. Éstos son conocidos como los **poliedros de Kepler-Poinsot**. Reciben este nombre ya que fueron Johannes Kepler (1571-1630) y Louis Poinsot (1777-1859) quienes los descubrieron.

Teniendo en cuenta que un polígono regular es el que tiene todos los lados y ángulos iguales, un pentagrama, que es la figura que se obtiene a partir de un pentágono regular -prolongando sus lados o uniendo sus diagonales-, es un polígono regular. Kepler se dio cuenta de que si unía cinco diagonales en un solo vértice, obtenía un nuevo poliedro regular, el **pequeño dodecaedro estrellado**. Si son tres pentagramas los que se encuentran en cada vértice, se obtiene el **gran dodecaedro estrellado**.

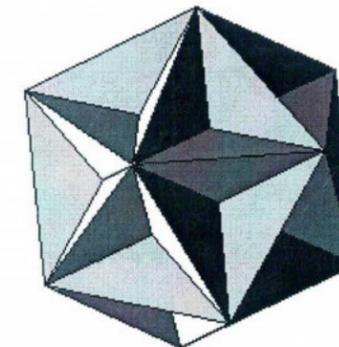


Pequeño dodecaedro estrellado

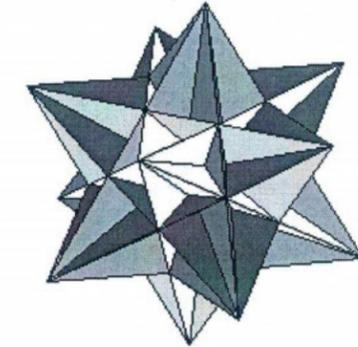


Gran dodecaedro estrellado

Posteriormente, Louis Poinsot descubrió los otros dos poliedros regulares no convexos: el **gran dodecaedro** y el **gran icosaedro**. Las 12 caras del gran dodecaedro son pentágonos que, a diferencia del dodecaedro, se intersectan unas a otras. El gran icosaedro se obtiene con 20 triángulos equiláteros, que se intersectan entre sí.



Gran dodecaedro



Gran icosaedro

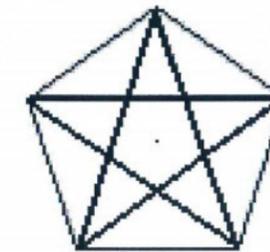
ESTELACIÓN DE POLÍGONOS

Consideremos el siguiente procedimiento conocido como **estelación**. Si se toma un polígono regular y se prolongan sus lados, tendremos las siguientes opciones: que las prolongaciones de los lados no se corten, que se corten sólo en un punto, o que se corten en más de dos puntos. Si ocurre alguna de las dos últimas opciones, aparecerán estrellas, algunas de las cuales son polígonos regulares y otras son intersecciones de polígonos. Veámoslo:

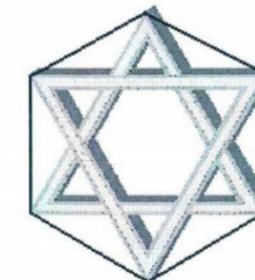
- En el triángulo y el cuadrado sus lados no se vuelven a cortar.



- Cuando se prolongan los lados de un pentágono obtenemos el siguiente polígono regular estrellado. Además de tener lados y ángulos iguales, cuando se parte de un vértice del polígono, con un movimiento ordenado a través de los lados del polígono, se pasa por todos los vértices antes de volver al vértice de partida:



- Cuando se prolongan los lados del hexágono obtenemos una estrella, pero no un polígono regular estrellado, ya que la estrella se forma por la intersección de dos triángulos:

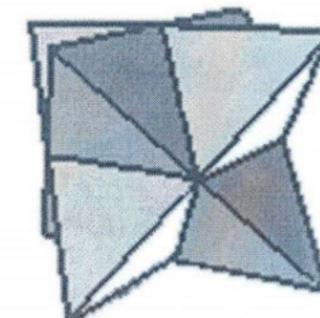
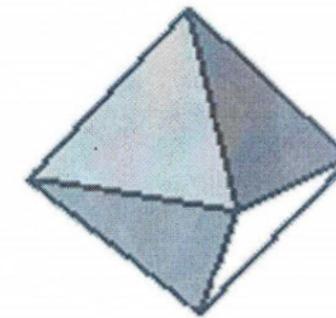


- Con el octágono aparecerán dos estrellas, una de las cuales es polígono y la otra no, ya que sólo es la intersección de dos cuadrados.

ESTELACIÓN DE POLIEDROS

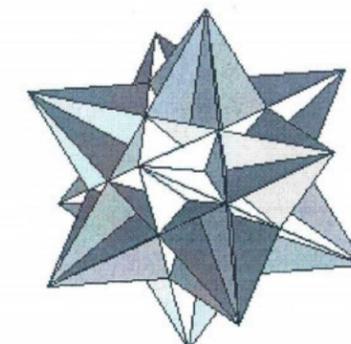
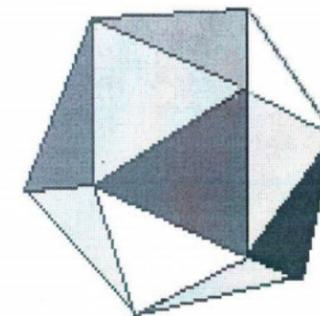
Haciendo la analogía con los polígonos, podemos hablar de la estelación de los poliedros. Los poliedros estrellados pueden obtenerse a partir de los poliedros platónicos, extendiendo sus caras. Este descubrimiento se le debe a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien probó que sólo existen nueve poliedros regulares: cinco convexos y cuatro no convexos). Prolongando las caras de los poliedros regulares convexos tenemos que:

- El tetraedro y el cubo no tienen estelaciones, es decir, con estos cuerpos no se pueden obtener cuerpos estrellados.
- El octaedro tiene una estelación.

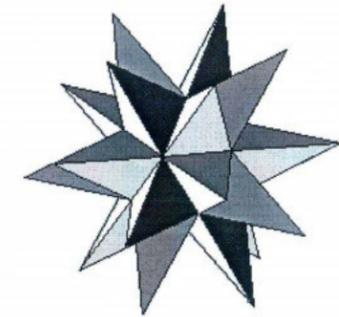
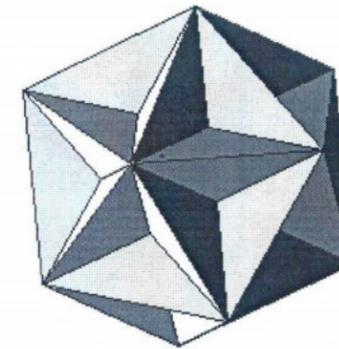
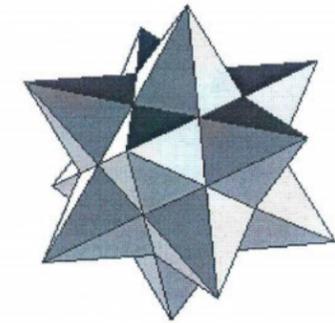
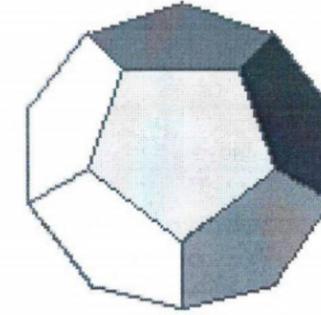


Estelación del octaedro

- El icosaedro tiene 59, entre las que está el gran icosaedro.

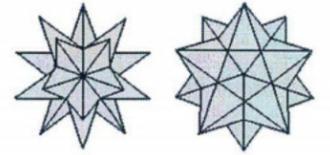


- El dodecaedro genera tres cuerpos estrellados: el pequeño dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro y el gran dodecaedro estrellado:



Elaborado por	Ivonne Ortega Echeverri y Walter Marín Serna. Mayo de 2006.
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • Poliedros #15. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Gregoria Guillen Soler. Editorial Síntesis. • http://roble.cnice.mecd.es/~jarran2/cabriweb/polirestellado.htm • De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: Historia de un poliedro. Edith Padrón Fernández. Universidad de La Laguna. http://www.gt.mafun.ull.es/divulgacion/Poliedros1.doc • http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/web3d/espanyol/poli_estelats.htm

Gran y pequeño dodecaedro estrellado en origami. Módulo zeta

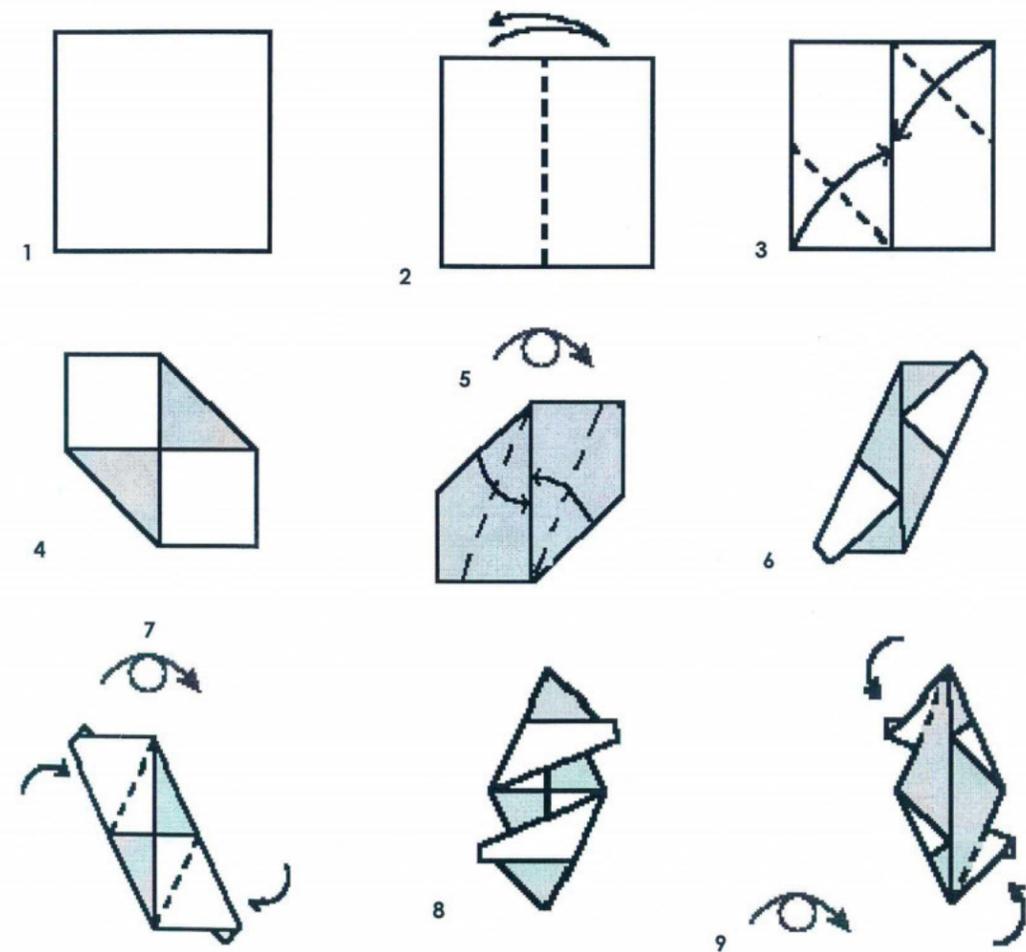


Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz y tijeras

Construyamos el gran dodecaedro estrellado en origami

Para su construcción necesitas 30 módulos exactamente iguales. Es necesario aclarar que la estrella formada no es en realidad un gran dodecaedro estrellado, pero sin embargo, es una muy buena representación de él.

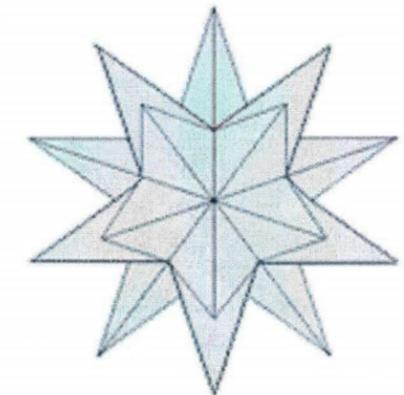
Cada módulo se hace a partir de un cuadrado, así:





Ahora deberás ensamblar los módulos para formar la estrella. Ten en cuenta que:

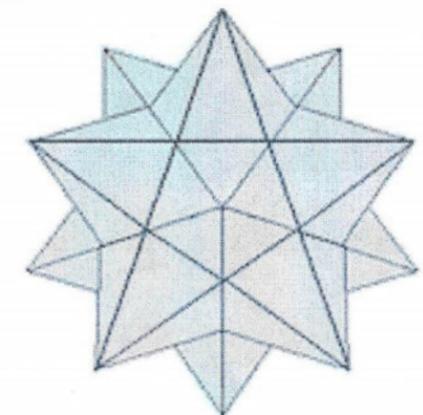
- Cada vértice se forma ensamblando tres módulos, lo que dará lugar a una pirámide de base triangular.
- Alrededor de cada punto de la base triangular de la pirámide anterior, deben quedar cuatro pirámides más; en otras palabras, cinco pirámides alrededor de un punto. Observa la gráfica:



Construyamos el pequeño dodecaedro estrellado en origami

Para construir este cuerpo necesitas 30 módulos exactamente iguales a los utilizados en el cuerpo anterior. Para ensamblarlos ten en cuenta:

- Cada vértice se forma ensamblando cinco módulos, lo que dará lugar a una pirámide de base pentagonal.
- Alrededor de cada punto de la base pentagonal de la pirámide anterior, deben quedar tres pirámides más; en otras palabras, tres pirámides alrededor de un punto. Observa la gráfica:



Elaborado por	Alejandro Cadena Isaza y Sara María Velásquez. Mayo de 2006
Referencias	<ul style="list-style-type: none"> • http://geocities.com/jordimastrullenque/sonobe/tornillo.html#torinstru • http://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_de_Kepler-poinsot

Gran dodecaedro



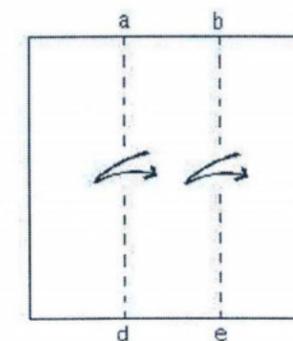
Proyecto	Aula Taller Explora de Matemáticas
Materiales	Papel, lápiz, escuadra y tijeras

El módulo utilizado fue desarrollado por Diego Vásquez, facilitador del Aula Taller Explora de Matemáticas. Este módulo cumple con todas las propiedades geométricas del cuerpo como son medida de ángulos diedros y poliedros, número de caras, aristas y vértices.

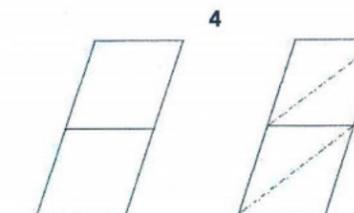
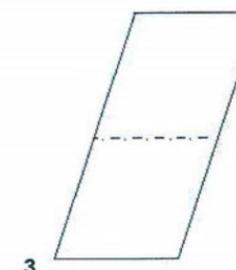
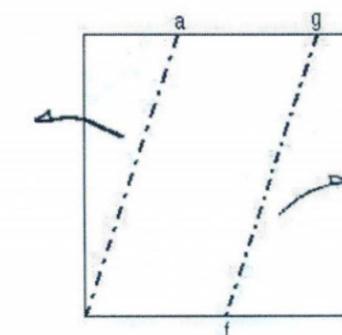
Construyamos el gran dodecaedro en origami

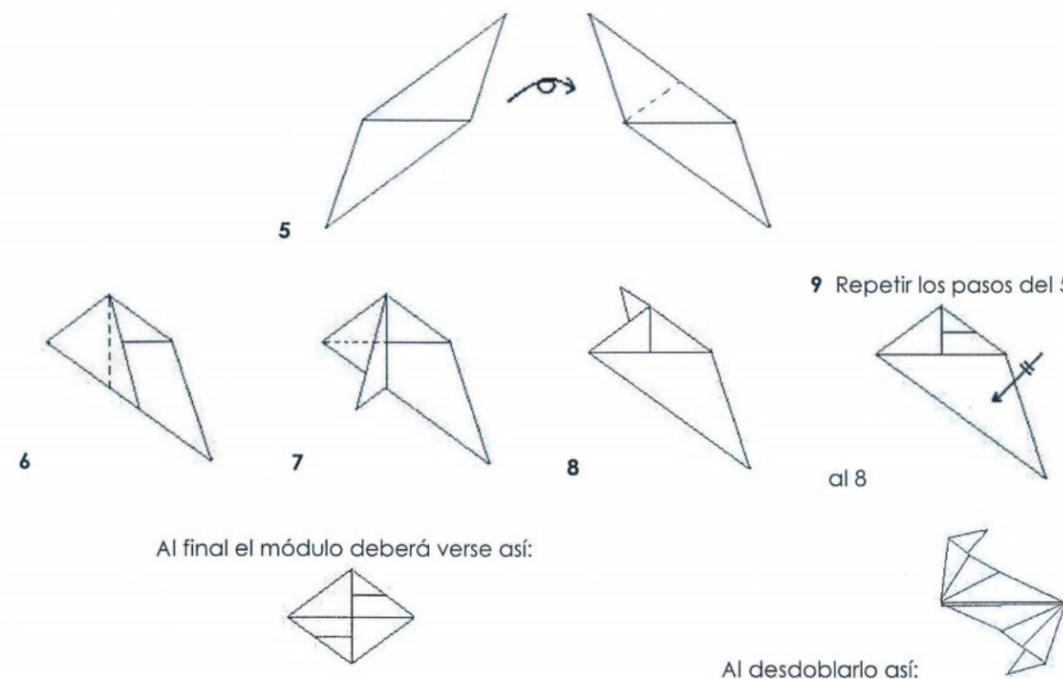
Requerimos 30 módulos exactamente iguales en forma de cuadrado. Sigue los pasos que se muestran a continuación:

1. a y b dividen el lado del cuadrado en 3 partes iguales

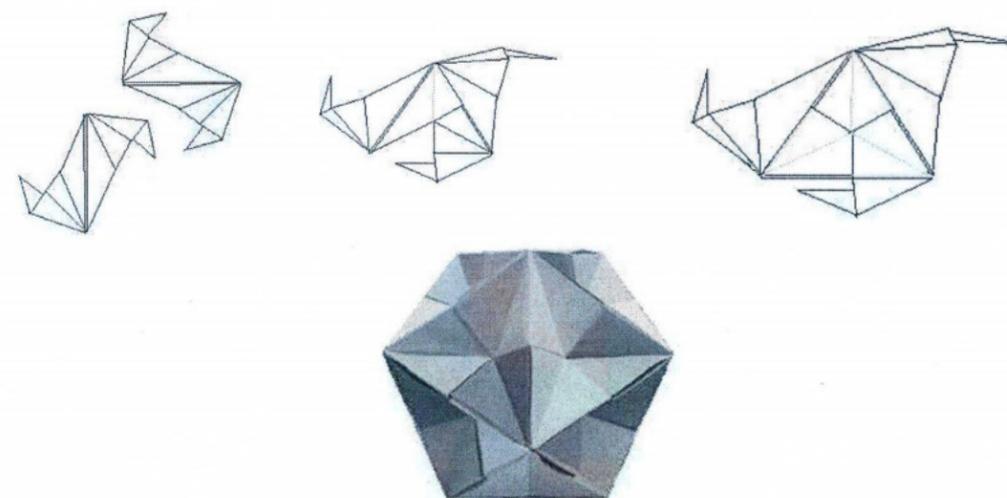


2. g es el punto medio del segmento bc y f es el punto medio del segmento de





A continuación se muestra cómo ensamblar. Hay que tener en cuenta que en cada vértice se deben unir cinco módulos:



"Cada cual crea para si mismo una idea clara del movimiento de un punto, es decir, del movimiento de un corpúsculo que uno supone ser infinitamente pequeño, y el cual uno reduce por pensamiento, de cierta manera a un punto matemático."
Louis Poinsof

Elaborado por	Diego Vásquez. Mayo de 2006.
Referencias	Poliedros #15. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Gregoria Guillen Soler. Editorial Síntesis.

Con la coordinación de:



Con la orientación académica de:

